

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 3. ACTIVIDADES 3.1 A 3.7

3.1) Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

Solución.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > a_1, \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > a_2$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \quad \forall n \end{aligned}$$

Así pues, $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y, por tanto, está acotada inferiormente por $a_1 = \frac{1}{2}$

Por otra parte, $a_n < \frac{n}{n+1} < 1$, es decir, 1 es una cota superior.

3.2) Justificar que la sucesión de números reales $\{a_n\} = (-1)^n \frac{n^2-1}{2n^2+1}$ no es convergente. ¿es divergente? ¿es oscilante? Razonar las respuestas.

Solución.

La subsucesión de los n pares converge a $1/2$ y la subsucesión de los n impares a $-1/2$. Por tanto la sucesión dada no es convergente. Tampoco es divergente ya que $|a_n| \rightarrow 1/2 \neq \infty$. Así pues, la sucesión es oscilante.

3.3) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La sucesión $\left\{ (-1)^n \frac{2n^3 + 3n^2 - 1}{n^4 + n - 1} \right\}$ es convergente a cero ya que $\left\{ \frac{2n^3 + 3n^2 - 1}{n^4 + n - 1} \right\}$ lo es.
- b) Toda sucesión acotada es convergente.
- c) La suma de dos sucesiones divergentes es también divergente.

Solución.

a) Cierto. El producto de una sucesión acotada por otra convergente a cero da como resultado una sucesión convergente a cero.

b) Falso. Así, por ejemplo, la sucesión de término general $(-1)^n$ es acotada y no convergente.

c) Falso. Así por ejemplo, $\{a_n\} = n$ y $\{b_n\} = -n$

3.4) Para cada una de las sucesiones siguientes, razonar si es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite, en su caso.

a) $\{a_n\} = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^3 + 3n^2 - n} \cdot \text{sen}(n)$

b) $\{a_n\} = \begin{cases} n^2 & \text{si } n = 3^{\circ} \\ (1/2)^n & \text{si } n \neq 3 \end{cases}$

c) $\{a_n\} = \frac{5n-1}{\sqrt[3]{2n^2+4n-1}}$

Solución.

a) Es convergente a cero. Es producto de una sucesión convergente a cero por otra acotada.

b) Es oscilante. La subsucesión de los n múltiplos de tres tiene límite $+\infty$ y la otra subsucesión tiene límite cero.

c) $\frac{5n-1}{\sqrt[3]{2n^2+4n-1}} = \frac{5 - \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}}} \rightarrow +\infty$ sucesión divergente

3.5) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente:

$$a_1 = 1/2 ; \quad 7a_{n+1} = a_n^3 + 6, \quad \text{si } n \geq 1$$

Estudiar la monotonía y acotación. ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite. ¿Es convergente si $a_1 = 5/2$? Razonar las respuestas.

Solución.

$$a_1 = \frac{1}{2} ; \quad a_2 = \frac{49}{56} > a_1$$

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n$. Lo demostraremos por inducción

$$\text{Si } n = 1, \quad a_1 < a_2 \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < a_{n+1}$ y demostraremos que $a_{n+1} < a_{n+2}$

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n^3 < a_{n+1}^3 \Rightarrow a_n^3 + 6 < a_{n+1}^3 + 6 \Rightarrow \frac{a_n^3 + 6}{7} < \frac{a_{n+1}^3 + 6}{7}$$

Por ser creciente está acotada inferiormente por a_1 . Veamos que está acotada superiormente, es decir, $\exists M \in \mathbb{R} / a_n \leq M \quad \forall n$. Lo demostraremos por inducción.

Si $n = 1$ $a_1 < 1$. Supuesto que $a_n < 1$ demostraremos que $a_{n+1} < 1$

$$a_n < 1 \Rightarrow a_n^3 < 1 \Rightarrow a_n^3 + 6 < 7 \Rightarrow \frac{a_n^3 + 6}{7} < 1$$

Al ser creciente y acotada superiormente se verifica que $\{a_n\}$ es convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^3 + 6}{7} \Leftrightarrow l = \frac{l^3 + 6}{7} \Leftrightarrow l^3 - 7l + 6 = 0 \Leftrightarrow (l-1)(l-2)(l+3) = 0$$

La única opción es $l = 1$.

$$\text{Si } a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_2 = \frac{173}{56} = 3.08....$$

De manera análoga a como hicimos antes se demuestra que la sucesión también es estrictamente creciente. Si la sucesión fuese acotada superiormente sería convergente y el límite habría de ser superior a a_2 , lo que está en contradicción con $l = 1$ ó $l = 2$ ó $l = -3$.

Así pues, ahora la sucesión es estrictamente creciente y no es acotada superiormente; por tanto no es convergente; es divergente a $+\infty$.

3.6) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente:

$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 2, \quad \text{si } n \geq 1$$

- Demostrar, por inducción, que $a_n < 8/3 \quad \forall n$
- Demostrar, sin aplicar inducción, que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.
- ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite.

Solución.

$$\text{a) Si } n = 1 \quad a_1 = 1 < \frac{8}{3} \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < \frac{8}{3}$ y demostraremos que $a_{n+1} < \frac{8}{3}$

$$a_n < \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{a_n}{4} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_n}{4} + 2 < \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$\text{b) } \{a_n\} \text{ es estrictamente creciente} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}a_n + 2 - a_n = 2 - \frac{3}{4}a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a_n < 2 \Leftrightarrow a_n < \frac{8}{3}$$

c) Por ser creciente y acotada superiormente es convergente.

$$l = \frac{l}{4} + 2 \Leftrightarrow l = \frac{8}{3}$$

3.7) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = 3/4; \quad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad , \quad n \geq 1$$

a) Demostrar, por inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ está bien definida y que todos sus elementos son positivos, es decir, que $a_n < 1$ y $a_n > 0 \quad \forall n$.

b) Demostrar, sin aplicar inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente.

$$\text{sugerencia: usar que } 1 - x = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x}$$

c) ¿Es convergente? Razonar la respuesta. En caso afirmativo calcular el límite.

Solución.

$$a_1 = 3/4 = 0.75 \quad , \quad a_2 = 1 - \sqrt{1/4} = 1/2 = 0.5, \quad a_3 = 1 - \sqrt{1/2}$$

a)

$$a_n < 1 \quad \forall n$$

$$\text{Para } n = 1, \quad a_1 = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < 1$ y demostraremos que $a_{n+1} < 1$

$$a_n < 1 \Rightarrow 1 - a_n > 0 \Rightarrow \sqrt{1 - a_n} > 0 \Rightarrow -\sqrt{1 - a_n} < 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - a_n} < 1$$

$$a_n > 0 \quad \forall n$$

$$\text{Para } n = 1, \quad a_1 = \frac{3}{4} > 0 \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > 0$ y demostraremos que $a_{n+1} > 0$

$$a_n > 0 \Rightarrow -a_n < 0 \Rightarrow 1 - a_n < 1 \Rightarrow \sqrt{1 - a_n} < 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - a_n} > 0$$

b)

$$\{a_n\} \text{ es estrictamente decreciente} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0 \quad \forall n$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - (1 - \sqrt{1 - a_n}) = a_n - \frac{(1 - \sqrt{1 - a_n})(1 + \sqrt{1 - a_n})}{1 + \sqrt{1 - a_n}} = a_n - \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 - a_n}} = \\ &= \frac{a_n \sqrt{1 - a_n}}{1 + \sqrt{1 - a_n}} > 0 \quad \text{ya que } a_n > 0 \quad \text{y } \sqrt{1 - a_n} > 0 \end{aligned}$$

c) Por ser decreciente y acotada inferiormente $\{a_n\}$ es convergente. Sea l el límite. Resulta:

$$l = 1 - \sqrt{1 - l} \Leftrightarrow \sqrt{1 - l} = 1 - l \Rightarrow 1 - l = 1 - 2l + l^2 \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ó } l = 1$$

$$l \neq 1 \text{ ya que } a_1 = 0.75 \text{ y la sucesión decrece. Por tanto } l = 0$$

