

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 2. ACTIVIDADES 2.4 A 2.14

2.4) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Sea f continua en $[-a, a]$. Si f es par entonces $\int_{-a}^a f(x)dx \neq 0$

b) $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \cdot \text{sen}(x)}{x^2 + 3} dx = 0$

c) $\int_{-2}^2 \frac{x^3 \text{sen}(x)}{x^2 + 1} dx = 0$

d) Si $\int_a^b f(x)dx > 0$ entonces $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2-x} e^{t^2} dt}{\int_0^x (1 + \cos t) dt} = 0$

g) La integral $\int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{x}} dx$ es impropia

Solución.

a) $f(x) = \cos(x)$ es par

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 2 \text{sen}(\pi) - 2 \text{sen}(0) = 0$$

Así pues, la afirmación es falsa

b) La afirmación es cierta (integral de una función impar en $[-2, 2]$).

c) $\int_{-2}^2 \frac{x^3 \text{sen}(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \int_0^2 \frac{x^3 \text{sen}(x)}{x^2 + 1} dx > 0$ la afirmación es falsa

d) Falsa

$$\int_0^2 (x^2 - 1)dx > 0 \quad ; \text{ sin embargo } x^2 - 1 < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1$ la afirmación es cierta

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2-x} e^{t^2} dt}{\int_0^x (1 + \cos t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)e^{(x^2-x)^2}}{1 + \cos(x)} = -\frac{1}{2}$ la afirmación es falsa

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$ (finito) la afirmación es falsa

2.5)

Comprobar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (\log x)^{1/2}} = \Gamma(1/2)$

Solución.

Cambio de variable: $\log(x) = t \quad ; \quad x = e^t$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (\log x)^{1/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^t dt}{e^{2t} t^{1/2}} = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma(1/2)$$

2.6)

Calcular $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Solución.

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{1} = \pi$$

2.7) Calcular el área de la región del plano delimitada por la curva $y = \log(x)$, el eje de abscisas, y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = e$.

Solución.

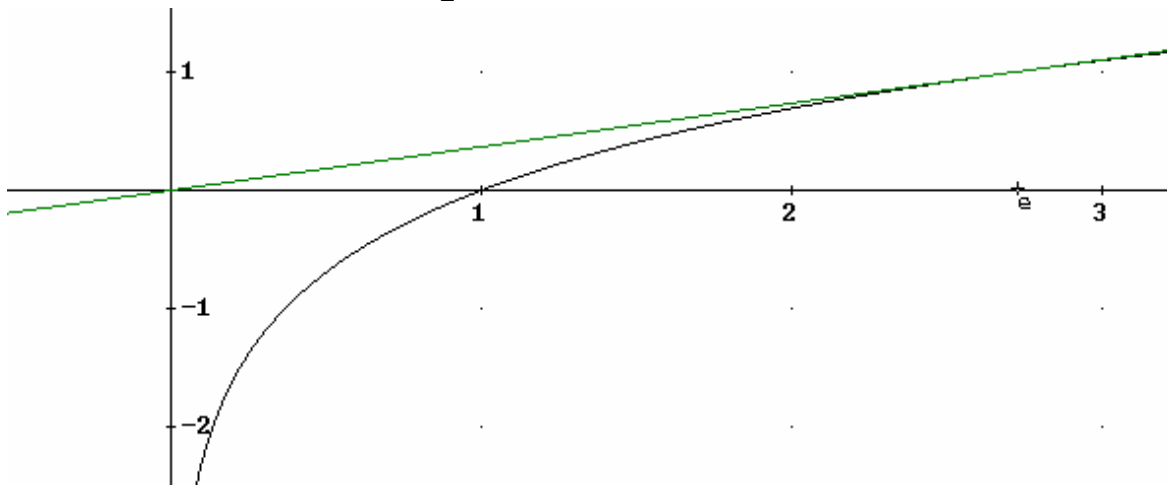
La ecuación de la recta tangente es: $y = \log(e) + \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e}$

$$A = \int_0^1 \frac{x}{e} dx + \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \log(x) \right) dx = \int_0^e \frac{x}{e} dx - \int_1^e \log(x) dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \log(x) dx$$

$$\int \log(x) dx = x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log(x) - x + C$$

$$\int_1^e \log(x) dx = x \cdot \log(x) - x \Big|_1^e = e \log(e) - e - 0 + 1 = 1$$

$$A = \frac{e}{2} - 1$$



2.8) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$, las rectas $x = 1$ y $x = 4$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

Solución.

$$A = \int_1^4 \frac{x}{x + \sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{t^2}{t^2 + t} 2t dt = 2 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt = 2 \int_1^2 \left[t - 1 + \frac{1}{t+1} \right] dt = 1 + 2 \log(3/2)$$

se ha hecho el cambio de variable $x = t^2$, $t \in [1, 2]$

2.9) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

Solución.

La función $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$ verifica que $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$. Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^1 f(x) dx$$

cambio de variable: $x = \sqrt{2} \sin(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$\sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 ; \quad \sqrt{2} \operatorname{sen}(\beta) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(\beta) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \beta = \pi/4$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2(t)}} \sqrt{2} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{2} \sqrt{\cos^2(t)}} \sqrt{2} \cos(t) dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3(t) dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(t)(1-\cos^2(t)) dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(t) dt + 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} -\operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dt = \\ &= -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \cos(0) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos^3(0) = -2 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \\ &= \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \end{aligned}$$

2.10) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$, las rectas $x=1$ y $x=\sqrt{3}$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

Solución.

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg}^2(t)}{\operatorname{tg}^2(t) \sqrt{1+\operatorname{tg}^2(t)}} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}^2(t)} dt = -\frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2.11) Calcular la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ de extremos los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Solución.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left((13/4)^{3/2} - 1\right)$$

2.12) Calcular el volumen de un cilindro de radio r y altura h .

Solución.

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h$$

2.13) Hallar el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje de abscisas la región del plano delimitada por la curva $y = e^{-x}$, los ejes coordenados y la recta $x=3$.

Solución.

$$V = \pi \int_0^3 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \pi e^{-2x} \Big|_0^3 = -\frac{1}{2} \pi (e^{-6} - 1)$$

2.14) Hallar el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje de ordenadas la región del plano determinada por la curva $y = e^{-x}$, los ejes coordenados y la recta $x = 3$.

Solución.

$$\int \log(x) dx = x(\log(x) - 1) \quad ; \quad \int \log^2(x) dx = x \log^2(x) - 2x \log(x) + 2x$$

$$A = \pi \int_0^1 [9 - \log^2(y)] dy = 7\pi$$

