

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 1. ACTIVIDADES 1.11 A 1.22

1.11) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) ¿Es f derivable por la derecha en $x = 0$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x = 0$?
 ¿Es f derivable en $x = 0$? Razonar las respuestas.
- b) Obtener la función derivada de f en los puntos donde exista.

Solución.

a)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$$

f es derivable por la derecha y por la izquierda en $x = 0$ ya que los límites anteriores son finitos. Sin embargo, f no es derivable en $x = 0$ ya que las derivadas laterales no son iguales.

b)

$$\text{Si } x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{2 + e^{1/x} + \frac{e^{1/x}}{x}}{(2 + e^{1/x})^2}$$

1.12) Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$
 b) $f(x) = e^{-|x|}$
 c) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$
 d) $f(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$; $f(x) = x^3$ si $x < 0$
 e) $f(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$

Solución.

a) $f'(x) = 3(1+x)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2(1+x)^3 \right)$

$$b) f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \text{sen}(1/h) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \text{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$d) f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$e) f'(x) = 2(1+x)^{\log(1+x)} \cdot \log(1+x) \cdot \frac{1}{1+x}$$

1.13) ¿Se puede aplicar Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in (0, 1]$, $f(0) = -1$ en $[0, 1]$?

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow f \text{ no es continua por la derecha en } x = 0 \Rightarrow f \text{ no es continua en } [0, 1]$$

No se puede aplicar Bolzano

1.14)

- Encontrar una función f definida en $[-1, 1]$ que no satisfaga alguna de las hipótesis del teorema de Rolle, y sin embargo verifique $f'(c) = 0$ para algún $c \in (-1, 1)$.
- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$?
- Demostrar que la ecuación $\text{sen}(x) + 3x - 1 = 0$ tiene una única raíz real y encontrar un intervalo de longitud menor que dos que la contenga.

Solución.

a)

$$f(x) = x^3 \text{ es tal que } f(-1) \neq f(1). \text{ Sin embargo, verifica } f'(0) = 0$$

b) No, ya que no es derivable en $x = 0$.

c) Sea $f(x) = \text{sen}(x) + 3x - 1$ continua y derivable en R

$$f'(x) = \cos(x) + 3 \neq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow \text{la ecuación } f(x) = 0 \text{ tiene, a lo sumo, una raíz real.}$$

$f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1) \cdot \frac{3\pi}{2} < 0 \Rightarrow$ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la ecuación $f(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz.

Así pues, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz real y un intervalo que la contiene es $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.15) Calcular los siguientes límites por la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right] \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \log(x) - x + 1}{(x-1)\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{\log(x) + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{(1/x) + (1/x^2)} = \frac{1}{2}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} x^x \quad ; \quad \log l = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \Rightarrow l = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{\cos(x)} = 2$$

1.16) Determinar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3(x-1)$.

Solución.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = 3/4$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = 1/2$$

$$f'(3/4) = 0, \quad f''(3/4) > 0 \Rightarrow f(3/4) \text{ mínimo relativo}$$

$$f''(0) = 0, \quad f'''(0) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ punto de inflexión}$$

$$f''(1/2) = 0, \quad f'''(1/2) \neq 0 \Rightarrow f(1/2) \text{ punto de inflexión}$$

1.17) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje X y está inscrito en el triángulo determinado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - 2x$.

Solución.

Sea b la longitud del lado sobre el eje X y sea h la altura

$$4 - 2(b + h) = h \quad , \text{ es decir, } h = \frac{4 - 2b}{3}$$

$$A = b.h = \frac{4b - 2b^2}{3} \quad ; \quad A' = \frac{4 - 4b}{3} = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

$$b = 1 \quad , \quad h = 2/3$$

1.18) Sea $f(x) = xe^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

- Estudiar la continuidad y la derivabilidad lateral (por la izda y por la dcha) de f en $x = 0$.
- Determinar los puntos críticos, los intervalos de monotonía y los extremos relativos de f .
¿existe el máximo ó el mínimo absoluto de f ? Razonar la respuesta.

Solución.

a)

$$f \text{ es continua por la izquierda en } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0e^{-\infty} = 0.0 = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ es continua por la izquierda en } x = 0.$$

$$f \text{ es continua por la derecha en } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = 0.e^{+\infty} = 0.\infty \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x^2(e^{1/x})}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

f no es continua por la derecha en $x = 0$ y por tanto f no es derivable por la derecha en $x = 0$.

$$f \text{ es derivable por la izquierda en } x = 0 \Leftrightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{he^{1/h}}{h} = e^{-\infty} = 0$$

Por tanto f es derivable por la izquierda en $x = 0$ y $f'(0^-) = 0$

b)

$x = 0$ es un punto crítico de f ya que f no es derivable en $x = 0$.

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = e^{1/x} + x.e^{1/x}.(-1/x^2) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Por tanto $x = 0$ y $x = 1$ son los puntos críticos de f .

intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$

$$\text{Si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{Si } x \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{Si } x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Por tanto f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$; es estrictamente decreciente en $(0, 1)$.

Aplicando el criterio de la derivada 1ª se tiene que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$, es decir, $f(1) = e$ es un mínimo relativo.

En $x = 0$ no podemos aplicar el criterio de la derivada 1ª ya que f no es continua en $x = 0$. $f(0) = 0$ no es ni máximo ni mínimo ya que $f(x) < 0 \quad \forall x < 0$ y $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

No hay extremos absolutos puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

1.19) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) Si $f(x) = x - \operatorname{tg}(x)$ entonces $f(0) = 0$ es un punto de inflexión.
- b) Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz real.

Solución.

a)

$$f'(x) = -\operatorname{tg}^2(x); \quad f''(x) = -2\operatorname{tg}(x) - 2\operatorname{tg}^3(x);$$

$$f'''(x) = -2(1 + \operatorname{tg}^2(x)) - 6\operatorname{tg}^2(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))$$

$$f''(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(0) \neq 0 \quad \text{la afirmación es cierta}$$

b) La afirmación es falsa. Sea, por ejemplo, $f(x) = e^x$; la ecuación $e^x = 0$ no tiene raíces reales.

1.20) Sea

$$f(x) = e^{-x} + |x+1| = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

- a) ¿Es f continua en $x = -1$? ¿Es f derivable por la derecha en $x = -1$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x = -1$? ¿Es f derivable en $x = -1$? Razonar las respuestas a partir del cálculo de los límites correspondientes.

- b) Obtener las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ en los puntos donde existan y determinar los puntos críticos de f .
- c) Estudiar la existencia de extremos (relativos y absolutos) y de puntos de inflexión.
- a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 asociado a f en el punto $x_0 = 0$.

Solución.

$$a) \quad f \text{ es continua en } x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} + x + 1 = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} - x - 1 = e \quad ; \quad f(-1) = e$$

f es continua en $x = -1$

Se dice que f es derivable por la derecha en $x = -1$ si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada por la derecha de f en el punto -1 , y se denota por $f'(-1^+)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-h} - 1 + h + 1 - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-h} + h - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-e^{1-h} + 1}{1} = 1 - e$$

Análogamente, se define la derivada por la izquierda en $x = -1$

$$f'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1-h} + 1 - h - 1 - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1-h} - h - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-e^{1-h} - 1}{1} = -1 - e$$

Por tanto f es derivable por la derecha y por la izquierda en $x = -1$

f es derivable en $x = -1 \Leftrightarrow f$ es derivable por la derecha y por la izquierda en $x = -1$ y ambas derivadas coinciden.

Así pues, f no es derivable en $x = -1$ ya que $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 1 & \text{si } x > -1 \\ -e^{-x} - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases} \quad ; \quad f''(x) = e^{-x} \quad \text{si } x \neq -1$$

$$-e^{-x} - 1 < 0 \quad \forall x. \text{ Por tanto, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \quad \text{para algún } x > -1$$

$$-e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Así pues, $x = 0$ es un punto crítico para f . También $x = -1$ es un punto crítico para f ya que $f'(-1)$ no existe.

c)

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 1 > 0$. Por tanto, $f(0) = 2$ es un mínimo relativo (criterio de la derivada segunda)

Si $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$.

$$-e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Si $x \in (-1, 0)$, $f'(x) = -e^{-x} + 1 < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-1, 0)$.

Si $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = -e^{-x} + 1 > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

Así pues, por el criterio de la derivada primera, $f(0) = 2$ es un mínimo relativo como ya sabemos

Además, $f(-1) = e$ no es extremo y $f(0) = 2$ es el mínimo absoluto. No hay puntos de inflexión (la función es siempre cóncava hacia arriba).

d)

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

1.21) Dada la función $f(x) = (x-1)^2 + (1-x)\sin(x) - \cos(x) - 1$

a) Aproximar, por Taylor, la función f en un entorno del cero mediante un polinomio P de grado dos y acotar el error $|f(0.1) - P(0.1)|$.

b) Obtener los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función f . ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $f(x) = 0$?

Solución.

$$a) \quad f(0) = -1 \quad ; \quad f'(x) = (x-1)(2 - \cos(x)) \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2 - \cos(x) + (x-1)\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$|f(0.1) - P(0.1)| = \left| \frac{f'''(c)}{6}(0.1)^3 \right| = \frac{|f'''(c)|}{6}(0.1)^3, \quad c \in (0, 0.1)$$

$$|f'''(c)| = |2\sin(c) + (c-1)\cos(c)| \leq 2|\sin(c)| + |c-1||\cos(c)| \leq 2 + |c-1| < 3$$

$$|f(0.1) - P(0.1)| < \frac{3}{6}(0.1)^3 = \frac{10^{-3}}{2}$$

b)

$$f'(x) = (x-1)(2 - \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

intervalos de monotonía: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$

$f(1)$ es un mínimo relativo(y absoluto).

La ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces reales; una está en $(1, \pi)$ y la otra en $(-\pi, 0)$

1.22) Resolver el apartado c) del ejercicio 1.5) usando el cálculo diferencial.

Solución.

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} \quad ; \quad f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} \neq 0$$

Por tanto, el máximo de f en el intervalo $[2, 3]$ se alcanza en uno de los extremos del intervalo; análogamente el mínimo.

$$f(2) = 5 \quad , \quad f(3) = \frac{7}{2} \quad ; \quad \max_{x \in [2, 3]} f(x) = 5 \quad , \quad \min_{x \in [2, 3]} f(x) = 7/2$$