

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 1. ACTIVIDADES 1.6 A 1.10

1.6) Obtener las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

Solución.

$x = -1$ asíntota vertical por la izquierda y por la derecha. No tiene asíntotas horizontales.

$y = x - 2$ asíntota oblicua en el $+\infty$ y en el $-\infty$.

1.7) Sea $f(x) = \frac{1}{-3 + \sqrt{9 - x^2}}$

- Obtener, de manera razonada, el dominio y la imagen de f . ¿Es f acotada en su dominio? Justificar la respuesta.
- ¿Puede tener f alguna asíntota horizontal u oblicua? Obtener, si existen, las asíntotas verticales de f por la izquierda y por la derecha.
- ¿Tiene f inversa en su dominio? ¿Por qué? Si consideramos la función f definida en el intervalo $[-3, 0)$, obtener la función inversa f^{-1} y su dominio.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Dom } f &= \{x \in \mathbb{R} / 9 - x^2 \geq 0 \text{ y } -3 + \sqrt{9 - x^2} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 9 \text{ y } x \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 3 \text{ y } x \neq 0\} = [-3, 3] - \{0\} = [-3, 0) \cup (0, 3] \end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in [-3, 0) \cup (0, 3] \Rightarrow x^2 \in (0, 9] \Rightarrow -x^2 \in [-9, 0) \Rightarrow -x^2 + 9 \in [0, 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 - x^2} \in [0, 3) \Rightarrow -3 + \sqrt{9 - x^2} \in [-3, 0) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-3 + \sqrt{9 - x^2}} \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Im } f = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$$

El conjunto imagen no es acotado inferiormente; por tanto f no es acotada en su dominio.

También se puede justificar que f no es acotada en su dominio por verificarse lo siguiente:

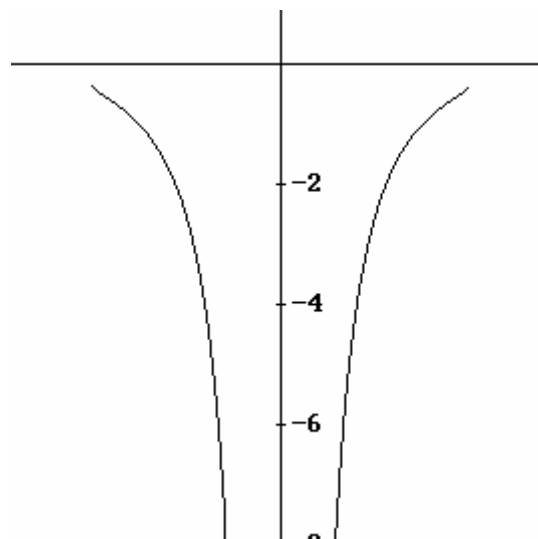
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

b) El dominio de f es un conjunto acotado superiormente e inferiormente; por tanto, f no puede tener asíntotas horizontales ni oblicuas ya que no tiene sentido calcular el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ ni cuando $x \rightarrow -\infty$.

$x = 0$ es una asíntota vertical por la izquierda y por la derecha :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

No existen más asíntotas verticales



c) f no es inyectiva en su dominio. Así, por ejemplo, $f(1) = f(-1)$; nótese que f es una función par. Por tanto la función f no tiene inversa en su dominio.

Si $\text{Dom } f = [-3, 0)$ entonces $\text{Im } f = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] = \text{Dom } f^{-1}$

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow \frac{1}{-3 + \sqrt{9 - t^2}} = x \quad \text{siendo } t = f^{-1}(x)$$

$$-3 + \sqrt{9 - t^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 9 - t^2 = \left(\frac{1}{x} + 3\right)^2 \Leftrightarrow t^2 = 9 - \left(\frac{1}{x} + 3\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$t = \pm \sqrt{9 - \left(\frac{1}{x} + 3\right)^2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}}$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{-\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}}$$

1.8) Calcular, empleando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{2^x - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\log(1+x)}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

1.9) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) ¿Es continua por la izquierda en $x = 0$? ¿Es continua por la derecha en $x = 0$? ¿Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$? Razonar las respuestas.
- b) Obtener todas las asíntotas de f .

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 = f(0) & f &\text{ es continua por la izquierda en } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty & f &\text{ no es continua por la derecha en } x = 0 \end{aligned}$$

f no tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$; tiene una discontinuidad esencial ya que no existe el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0$.

- b)
- $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha. No tiene asíntotas horizontales.
- $y = x + 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

1.10) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La función siguiente es continua en $x = 1$ por la izquierda y no lo es por la derecha.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- b) Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional que tiene una asíntota horizontal, entonces el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

- c) La composición de dos funciones reales de variable real siempre define una función real de variable real.

d) La ecuación $\operatorname{sen}(x) - x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{Verdadera}$$

b) Pueden ser también los grados iguales

Falsa

c) Sea $g(x) = -x^2$ y $f(x) = \log(x)$

$$(f \circ g)(x) = \log(-x^2) \quad \text{no define una función} \quad \text{Falsa}$$

d) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x - 1$ continua

$$f(-\pi) \cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \text{y aplicamos Bolzano} \quad \text{Verdadera}$$