

CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

PRÁCTICA 5. SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS

Ejercicio:

Se considera la sucesión de números reales $\{a_n\} = \frac{2n}{n^3 - 1}$, $n \geq 2$

a) Comprobar que $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente, es decir, $a_n - a_{n+1} > 0 \quad \forall n \geq 2$

b) Obtener el límite de $\{a_n\}$.

```
>> syms n
>> an=2*n/(n^3-1)
a)
>> an-subs(an,n,n+1)
ans = 2*n/(n^3-1)-2*(n+1)/((n+1)^3-1)
>> pretty(factor(ans))
```

$$\frac{2(2n^3 + 3n^2 + n + 1)}{n(n-1)(n^2 + n + 1)(n^2 + 3n + 3)}$$

```
b)
>> limit(an,n,inf)
```

0

Ejercicio:

Se considera la sucesión de números reales $\{a_n\} = \sqrt[n]{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Calcular a_{50} y a_{100} ¿Es convergente?

```
>> syms n
>> an=n^(1/n)

>> subs(an,n,50) , subs(an,n,100)
1.0814          1.0471

>> limit(an,n,inf)
1 (es convergente)
```

Ejercicio:

Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$$\{a_n\} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \quad k \in \mathbb{R} ; \quad \{b_n\} = \frac{\log(1 + e^n)}{n} ; \quad \{c_n\} = (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}} ; \quad \{d_n\} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$$

```
>> syms n k
>> an=(1+(k/n))^n
>> limit(an,n,inf)
exp(k)
```

```
>> bn=log(1+exp(n))/n
>> limit(bn,n,inf)
1

>> cn=(n^3-1)^(1/(3*n))
>> limit(cn,n,inf)
1

>> dn=sqrt(n)/sqrt(n+sqrt(n+sqrt(n)))
>> limit(dn,n,inf)
1
```

Ejercicio:

Sea $\{a_n\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \cdot \cos(k\pi) \quad n = 1, 2, \dots$

- a) Definir a_n mediante la orden *symsum*.
 b) Calcular a_{10} , a_{50} , a_{100} y a_{1000} ¿Dirías que es una sucesión convergente?

```
>> syms n k
a)
>> an=symsum(cos(k*pi)/(k*(k+1)),k,1,n)

b)
>> a10=subs(an,n,10)
>> a50=subs(an,n,50)
>> a100=subs(an,n,100)
>> a1000=subs(an,n,1000)
```

≈ -0.3822
 ≈ -0.3861
 ≈ -0.3862
 ≈ -0.3863

Parece que si es convergente; vamos a calcular el límite

```
>> limit(an,n,inf)
1-2log(2)
```

Ejercicio:

Sea $\{a_n\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad n = 1, 2, \dots$

- a) Definir a_n mediante la orden *symsum*.
 b) Obtener a_{10} , a_{100} , a_{1000} y a_{10000} ¿Dirías que es una sucesión convergente?

```
>> syms n k
a)
>> an=symsum(1/k,k,1,n)

b)
>> a10=subs(an,n,10)
                                     ≈ 2.9290
>> a100=subs(an,n,100)
                                     ≈ 5.1874
>> a1000=subs(an,n,1000)
                                     ≈ 7.4855
>> a10000=subs(an,n,10000)

No está claro; vamos a calcular el límite

>> limit(an,n,inf)
∞ es una sucesión divergente
```

Ejercicio:

Sea $\{a_n\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ $n = 1, 2, \dots$

- Definir a_n mediante la orden *symsum*.
- Calcular a_{10} y a_{20} . Dar valores aproximados
- Obtener $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Ejercicio:

Obtener la suma de las series siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{8^n}$$

```
>> syms n
>> S=symsum(1/n,1,inf)
S = Inf

>> S=symsum(1/n^2,1,inf)
S = 1/6*pi^2

>> S=symsum((-1)^n/n^2,1,inf)
S = -1/12*pi^2

>> S=symsum(4^(-n),1,inf)
S = 1/3

>> S=symsum((3*n+2)/8^n,1,inf)
S = 38/49
```

Criterio de la raíz.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Si $0 \leq l < 1$ la serie es convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Criterio del cociente.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Si $l < 1$ la serie es convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Criterio del Raabe.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = l$. Si $l > 1$ la serie es convergente. Si $l < 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Ejercicio:

Estudiar el carácter de la serie numérica siguiente aplicando los criterios de la raíz, del cociente y de Raabe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{serie de términos positivos}$$

```
>> syms n
>> an=((2*n+1)^(1/3)-(2*n-1)^(1/3))/sqrt(n)

>> limit((an)^(1/n),n,inf)
1

>> bn=subs(an,n,n+1)/an

>> limit(bn,n,inf)
1

>> % Los criterios de la raíz y del cociente no deciden.

>> cn=n*(1-bn)
>> limit(cn,n,inf)
7/6

>> % La serie es convergente por el criterio de Raabe.
```