

CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

PRÁCTICA 3. CALCULO SIMBÓLICO II

Derivación.

- **diff(f)**: deriva la función **f**.
- **diff(f,n)**: deriva **n** veces la función **f**.

La ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = \text{subs}(f, x, a) + \text{subs}(\text{diff}(f), x, a) * (x - a)$$

Ejercicio:

Sea $f(x) = \arctg\left(\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}\right)$

- Comprobar, usando **simplify**, que la función derivada es una constante.
- Hallar la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 0$.
- Dibujar con **ezplot**, en la misma ventana gráfica, la función f y la recta tangente anterior en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Interpretar el dibujo.

a)

```
>> syms x
>> f=atan(cos(x)/(1+sin(x)))
>> simplify(diff(f))
-1/2
```

b)

```
>> y = subs(f, x, 0) + subs(diff(f), x, 0) * (x - 0)
y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}
```

c)

```
>> ezplot(f, [-pi/2, 3*pi/2])
>> hold on
>> ezplot(y, [-pi/2, 3*pi/2])
```

La gráfica de la función f y la de la recta son coincidentes en el intervalo abierto $(-\pi/2, 3\pi/2)$; en los extremos del intervalo la función f no está definida ya que $\sin(-\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1$. Se verifica, por tanto, que

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad \forall x \in (-\pi/2, 3\pi/2)$$

Ejercicio propuesto:

Sea $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = -1$.
- Dibujar con **ezplot**, en la misma ventana gráfica, la función f y la recta tangente anterior en el intervalo $[-2, 0]$.

Solución: $y = \frac{5}{2}x + 4$

Obtención de máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Si el dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la continuidad de la función garantiza la existencia tanto del máximo absoluto como del mínimo absoluto. En este caso, tanto estos extremos absolutos, como los posibles extremos relativos, se encuentran entre los valores de la función en sus puntos críticos, que son:

- los puntos en los que f no es derivable.
- Los puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que $f'(x_0) = 0$.
- Los puntos frontera, es decir, a y b .

Criterio de la derivada enésima.

- Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Entonces, si n es par, f tiene un mínimo relativo en x_0 si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si n es impar, f no tiene extremo en x_0 .
- Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Entonces si n es impar, f tiene en x_0 un punto de inflexión.

Ejercicio:

Hallar los extremos (absolutos y relativos) y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15 \quad \text{si } x \in [0, 3].$$

Corroborar los resultados con la gráfica.

```
>> syms x
>> f = 2 * x^3 - 9 * x^2 + 12 * x + 15
>> solve(diff(f))
      2      1
>> subs(f,x,0), subs(f,x,1), subs(f,x,2), subs(f,x,3)
      15      20      19      24
```

$$\max_{x \in [0, 3]} f(x) = f(3) = 24 \quad \text{max. absoluto} \quad ; \quad \min_{x \in [0, 3]} f(x) = f(0) = 15 \quad \text{min. absoluto}$$

```
>> subs(diff(f,2),x,1), subs(diff(f,2),x,2)
      <0      >0
```

$$f(1) = 20 \quad \text{max. relativo} \quad ; \quad f(2) = 19 \quad \text{min. relativo}$$

```
>> solve(diff(f,2))
```

```
3/2
>> subs(diff(f,3),x,3/2)
≠ 0
```

```
>> subs(f,x,3/2)
19.5
```

$f(3/2) = 19.5$ punto de inflexión

```
>> ezplot(f, [0, 3])
```

Ejercicio:

Demostrar que $x = 0$ es un punto crítico de la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos(x)$ y estudiar si $f(0)$ es máximo local, mínimo local ó punto de inflexión. Corroborarlo con la gráfica.

```
>> syms x
```

```
>> f = (exp(x)+exp(-x))/2 + cos(x)
```

```
>> subs(diff(f),x,0)
0
```

$x = 0$ es un punto crítico de f ya que $f'(0) = 0$

```
>> subs(diff(f,2),x,0)
0
```

```
>> subs(diff(f,3),x,0)
0
```

```
>> subs(diff(f,4),x,0)
2
```

```
>> subs(f,x,0)
2
```

$f(0) = 2$ mínimo local ya que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{(4)}(0) > 0$

```
>>ezplot(f,[-1,1])
```

Ejercicio propuesto:

Obtener los extremos relativos de las funciones

$$f(x) = \log \sqrt{2x^3 + 3x^2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 8x + 17}}$$

$$f(-1) = 0 \quad \text{máximo relativo} \quad ; \quad g(4) = 1 \quad \text{máximo relativo}$$

Ejercicio:

Comprobar que la función $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-3)}$ tiene una inflexión en el punto de abscisa $x = -\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \approx -3.52$.

Polinomios de Taylor.

- **taylor(f, n , xo)** : calcula el polinomio de Taylor de orden **n-1** asociado a la función **f** en un entorno de **xo**.

Ejercicio:

Aproximar, mediante el polinomio de Taylor de orden 2, la función $f(x) = \log(x+1)$ en un entorno del 0 y dibujar (en una misma ventana) ambas curvas en el intervalo $[-2, 2]$.

```
>> taylor(log(x+1),3,0)
```

$$T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

```
>> ezplot(log(x+1),[-2,2])
```

```
>> hold on
```

```
>> ezplot(x-1/2*x^2,[-2,2])
```

Ejercicio:

Usar el polinomio anterior para obtener un valor aproximado de $\log(1.1)$ y comprobar que el error absoluto cometido es menor que una milésima.

```
>> subs(x-1/2*x^2,x,0.1)
```

$$\log(1.1) \approx T_2(0.1) = 0.0950$$

```
>> abs(log(1.1)-0.0950)
```

$$3 \times 10^{-4}$$

Ejercicio propuesto:

Obtener el polinomio de Mac-Laurin de orden 3 de la función $f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ y usarlo para calcular un valor aproximado de $\log(3)$.

$$T_3(x) = x + \frac{x^3}{3} \quad ; \quad \log(3) \approx 0.9707$$