

CÁLCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
PRÁCTICA 2. CALCULO SIMBÓLICO I

Comandos de uso frecuente con expresiones simbólicas.

- **syms x** : declara a **x** como variable simbólica.
- **factor(f)** : factoriza la expresión **f**.
- **pretty(f)** : presenta de forma “elegante” la expresión **f**.
- **simplify(f)** : simplifica la expresión simbólica **f**.
- **solve(f)** : resuelve la igualdad **f = 0**.
- **subs(f, x, a)** : sustituye en la expresión simbólica **f** la variable **x** por **a**.

Ejercicios:

- Sea $f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8$. Factorizar dicha expresión. Calcular el valor de $f(1)$ y $f(4)$.

```
>> syms x
>> f=x^5-8*x^4+25*x^3-38*x^2+28*x-8
>> factor(f)
ans = (x-1)^2*(x-2)^3
>> subs(f,x,1)
ans =0
>> subs(f,x,4)
ans = 72
```

- Sea $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Presentar dicha expresión utilizando el comando **pretty**. Realizar su simplificación.

```
>> syms x
>> f=(x^2-1)/(x-1)
>> pretty(f)
>> simplify(f)
ans = x+1
```

- Resolver la ecuación $|x - 3| = 8$.

```
>> solve(abs(x-3)-8)
ans = -5      11
```

Ventanas gráficas.

Al realizar una gráfica con MATLAB se abre automáticamente una *ventana gráfica* (figure). También se puede crear una ventana gráfica que no contenga ninguna gráfica con las órdenes:

figure (genera una ventana gráfica)

figure (n) (genera la ventana gráfica número n; si ya existe, la activa).

Para cerrar ventanas gráficas se usan las órdenes:

close (cierra la ventana gráfica activada)

close(n) (cierra la ventana gráfica número n)

close all (las cierra todas)

Cada gráfica se realiza, por defecto, en una ventana gráfica distinta. Si queremos realizar varias gráficas en la misma ventana se utiliza la orden:

hold on (mantiene activa la ventana gráfica actual)

La orden **hold off** es la opción por defecto (cada gráfica en una ventana distinta)

La orden **hold** se usa para intercambiar las dos anteriores.

Gráficas 2D de expresiones simbólicas.

- **ezplot(f, [a,b])** : dibuja la función **f** , expresada simbólicamente, en el intervalo **[a,b]**.

Nota. No admite opciones de cambio en el color o el trazo de la línea como *plot* o *fplot*.

Ejemplo:

Dibujar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

```
>> syms x                % definimos la variable x como simbólica.  
>> f = x^2               % genera la expresión simbólica f = x^2 .  
>> ezplot(f , [-2,2])    % dibuja la función en el intervalo [-2,2].
```

Ejercicio propuesto:

- Sea $f(x) = e^{-x^2} \text{sen}(\pi x^3)$, $x \in [-2, 2]$
 - a) Usar la orden *ezplot* para representar gráficamente la función *f* en el dominio dado
 - b) Dígase, aproximadamente, el mayor intervalo de la forma $[-a, a]$ en el que *f* sea creciente. (Usar “Data Cursor” y hacer clic sobre los puntos en la gráfica)
 - c) ¿es *f* par? ¿es *f* impar? Razonar brevemente las respuestas.
 - d) ¿es acotada en el dominio dado? Obtener, si existen, el máximo y el mínimo de *f* en el dominio dado (de manera aproximada usando “Data Cursor”).

Composición de funciones.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{y, por tanto,} \quad \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$\text{Si } \text{Im}(g) \subset \text{Dom}(f) \text{ entonces } \text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g)$$

- **compose(f,g)** : calcula la composición **fog** de dos funciones.

Nota. La obtención del dominio de una función no se puede hacer directamente con el programa.

Ejemplo:

Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-3}$. Calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y los dominios respectivos.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad ; \quad \text{Dom}(g) = [3, \infty)$$

```
>> syms x
```

```
>> f = x^2 + 1 ; g = (x - 3)^(1/2);
```

```
>> compose(f,g)
```

```
    x - 2
```

```
>> compose(g,f)
```

```
(x^2 - 2)^(1/2)
```

$$\text{Dom}(f \circ g) = [3, \infty), \quad \text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$$

Función inversa.

Recordemos que si $f(x)$, $x \in D$, es inyectiva entonces la función inversa f^{-1} es la única función que verifica: $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \text{Im}(f)$.

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) \quad ; \quad \text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = D$$

- **finverse(f)** : devuelve la función inversa de **f**.

Antes de dar la inversa de f , Matlab en algunas ocasiones avisa con un warning de que la inversa no es única. Este mensaje es erróneo para funciones como $f(x) = x^3$ ya que $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ independientemente del dominio de f considerado.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 1$. Obtener f^{-1} e interpretar el resultado.

f no es inyectiva en $\mathbb{R}$. Lo es en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$

```
>> syms x
```

```
>> f = x^2 + 1 ;
```

```
>> finverse(f)
```

```
(-1 + x)^(1/2)
```

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

La función que nos da el programa se corresponde con la inversa de f en el caso de que f esté definida en $[0, \infty)$. Si f está definida en $(-\infty, 0]$ la inversa sería:

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}.$$

Ejercicio:

- Se consideran las funciones

$$f(x) = x(x-1) \quad g(x) = e^{-x} \quad h(x) = \log(-x)$$

- a) Obtener $f \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ g \circ h$, $f \circ g$.
¿Qué composición de las obtenidas no define una función real de variable real?
- b) Dibujar la función f en $[-1, 2]$. ¿Es f inyectiva en $[-1, 2]$? En caso negativo, restringir f a un dominio donde sí lo sea y hallar la función inversa f^{-1} .

a)

```
>> syms x
>> f=x*(x-1);g=exp(-x);h=log(-x);
>> compose(f,f)
ans = x*(x-1)*(x*(x-1)-1)
>> expand(ans)
ans = x^4-2*x^3+x
>> compose(g,h)
ans = -1/x
>> compose(h,g)
ans = log(-exp(-x))
>> compose(compose(f,g),h)
ans = -1/x*(-1/x-1)
>> expand(ans)
ans = 1/x^2+1/x
>> compose(f,g)
ans = exp(-x)*(exp(-x)-1)
```

$h \circ g$ no define una función real de variable real

b)

```
>> ezplot(f,[-1,2])
f no es inyectiva en [-1,2]. Así, por ejemplo: f(0)=f(1)
f es inyectiva, por ejemplo, en [1/2,2] y en este caso Imf=[-1/4,2].
>> finverse(f)
ans = 1/2+1/2*(1+4*x)^(1/2)
```

Cálculo de límites.

- **limit(f, x, a)** : calcula el valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Si queremos calcular el límite por la derecha o por la izquierda debemos añadir un cuarto argumento: **limit(f, x, a, 'right')**, **limit(f, x, a, 'left')**.

Ejemplo:

Comprobar, mediante límites, que la función $f(x) = x(x-1), x \in \mathbb{R}$, no es acotada superiormente.

```
>> syms x
>> f = x*(x-1)
>> limit(f, x, inf)
Inf
```

Ejercicio propuesto:

●Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim \frac{\text{sen}(x-a)}{x^2-a^2}$ si $x \rightarrow a$, b) $\lim (x^2+x^3) \log\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$ si $x \rightarrow \infty$
 c) $\lim \frac{\text{sen}(x)-\cos(x)}{1-\text{tg}(x)}$ si $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, d) $\lim (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}$ si $x \rightarrow 0$
 e) $\lim \frac{8}{2+e^{-1/x}}$ si $x \rightarrow 0$

- a) $\frac{1}{2a}$; b) 1 ; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) 1 ; e) NaN (no existe, límites laterales distintos)

Obtención de las asíntotas verticales de una función.

Condición necesaria (no suficiente) para que $x = a$ sea una asíntota vertical de la función f es que el punto a no pertenezca al dominio de la función o bien sea un punto del dominio en el que la función es discontinua.

Si $\lim(f, x, a, 'left')$ es infinito (ó - infinito) entonces $x = a$ es una asíntota vertical por la izquierda. Si $\lim(f, x, a, 'right')$ es infinito (ó - infinito) entonces $x = a$ es una asíntota vertical por la derecha.

Ejemplo:

Comprobar que la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$ no tiene asíntotas verticales.

```
>> syms x
>> f = 1/(1+exp(1/(1-x)))
>> limit(f,x,1,'left'), limit(f,x,1,'right')
```

Ninguno de los límites anteriores da infinito.

Obtención de las asíntotas horizontales de una función.

$y = b$ es una asíntota horizontal de f si $\lim(f, x, \text{inf})$ y/o $\lim(f, x, -\text{inf})$ es igual a " b " ($b \in \mathbb{R}$).

Ejemplo:

Obtener las asíntotas horizontales de $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

```
>> syms x
>> f = 1/(1+exp(1/(1-x)))
>> limit(f,x,inf), limit(f,x,-inf)
```

$y = 1/2$ es asíntota horizontal por los dos lados

Obtención de las asíntotas oblicuas de una función.

$y = ax + b$, $a \neq 0$, es una asíntota oblicua de f si :

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)/x) \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - a \cdot x)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)/x) \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - a \cdot x)$$

Si una función tiene asíntota horizontal por los dos lados entonces no puede tener asíntotas oblicuas. Podría tener una horizontal por un lado y una oblicua por el otro lado.

Ejercicio propuesto:

- Obtener las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \log(x^2 + 3x + 2) \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} \quad ; \quad h(x) = xe^{1/x}$$

```
>> solve(x^2+3*x+2)
ans = -1 -2
```

$$\text{Dom}f = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

$x = -1$ asíntota vertical por la dcha para f y $x = -2$ asíntota vertical por la izda

f no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas

$x = 2$ asíntota vertical por la izda y por la dcha para g .

g no tiene asíntotas horizontales. $y = x + 4$ asíntota oblicua para g

$x = 0$ asíntota vertical por la dcha para h .

h no tiene asíntotas horizontales. $y = x + 1$ asíntota oblicua para h

Ejercicio propuesto:

- Sea $f(x) = x.e^{\frac{1}{x-1}}$

a) Obtener, si existen, las asíntotas verticales (por la izquierda y/o por la derecha) de f .

b) Obtener, si existen, las asíntotas horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$) de f .

c) Obtener, si existen, las asíntotas oblicuas (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$) de f .

