

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
EJERCICIOS PROPUESTOS DEL TEMA 3

3.1) Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

3.2) Justificar que la sucesión de números reales $\{a_n\} = (-1)^n \frac{n^2-1}{2n^2+1}$ no es convergente. ¿es divergente? ¿es oscilante? Razonar las respuestas.

3.3) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La sucesión $\left\{(-1)^n \frac{2n^3+3n^2-1}{n^4+n-1}\right\}$ es convergente a cero ya que $\left\{\frac{2n^3+3n^2-1}{n^4+n-1}\right\}$ lo es.
- b) Toda sucesión acotada es convergente.
- c) La suma de dos sucesiones divergentes es también divergente.

3.4) Para cada una de las sucesiones siguientes, razonar si es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite, en su caso.

a) $\{a_n\} = \frac{n^2-3n+1}{2n^3+3n^2-n} \cdot \text{sen}(n)$

b) $\{a_n\} = \begin{cases} n^2 & \text{si } n = 3 \\ (1/2)^n & \text{si } n \neq 3 \end{cases}$

c) $\{a_n\} = \frac{5n-1}{\sqrt[3]{2n^2+4n-1}}$

3.5) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente:

$$a_1 = 1/2 \quad ; \quad 7a_{n+1} = a_n^3 + 6, \quad \text{si } n \geq 1$$

Estudiar la monotonía y acotación. ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite. ¿Es convergente si $a_1 = 5/2$? Razonar las respuestas.

3.6) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente:

$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 2, \quad \text{si } n \geq 1$$

- a) Demostrar, por inducción, que $a_n < 8/3 \quad \forall n$
- b) Demostrar, sin aplicar inducción, que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.
- c) ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite.

3.7) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = 3/4; \quad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad , \quad n \geq 1$$

- a) Demostrar, por inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ está bien definida y que todos sus elementos son positivos, es decir, que $a_n < 1$ y $a_n > 0 \quad \forall n$.
- b) Demostrar, sin aplicar inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente.

sugerencia: usar que $1 - x = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x}$

- c) ¿Es convergente? Razonar la respuesta. En caso afirmativo calcular el límite.

3.8) Estudiar el carácter de las series siguientes:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{n^3+n}$$

3.9)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudiar el carácter de la siguiente serie para los distintos valores de “ a ” y calcular su suma en los casos en que sea convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+3}}{(a+1)^n}$$

3.10) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) Si la serie de término general a_n es convergente, entonces la serie de término general $n \cdot a_n$ también es convergente.
- b) La serie siguiente es convergente y también absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{8}{9} \right)^n$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$$

3.11) Comprobar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)}$ es condicionalmente convergente.

3.12) Calcular la suma de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

