

CALCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

EJERCICIOS PROPUESTOS DEL TEMA 1

1.1) ¿Para qué valores de $x, y \in R$ se verifica cada una de las propiedades siguientes:

a) Si $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

b) Si $x < y \Rightarrow -x > -y$

c) $|x + y| = |x| + |y|$

d) $|x.y| = |x|.|y|$

1.2) Obtener los números reales x que verifican las desigualdades siguientes:

a) $|x+3| + |x-3| < 8$

c) $\left| \frac{4}{x^2 - 1} \right| \leq 2$

$$\text{b) } \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq 1$$

d) $\left| \frac{x-3}{x-1} - 3 \right| \geq 2$

1.3) Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2} - 2}$

Obtener el dominio y la imagen de f . ¿Es f acotada en su dominio? Determinar, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de f en su dominio?

1.4) Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0.5, \infty)$

1.5) Se considera la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \dots$$

a) Hallar el dominio y la imagen de f

b) Esbozar la gráfica de f (hipérbola equilátera) ¿Es f acotada en su dominio? ¿Es f acotada en el intervalo $[2,3]$? Razonar las respuestas.

c) ¿Quién es el máximo de $f(x)$ si $x \in [2, 3]$? ¿Quién es el mínimo de $f(x)$ si $x \in [2, 3]$?

d) ¿Tiene f inversa? En caso afirmativo, obtenerla.

1.6) Obtener las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

1.7) Sea $f(x) = \frac{1}{-3 + \sqrt{9 - x^2}}$

a) Obtener, de manera razonada, el dominio y la imagen de f . ¿Es f acotada en su dominio? Justificar la respuesta.

b) ¿Puede tener f alguna asíntota horizontal u oblicua? Obtener, si existen, las asíntotas verticales de f por la izquierda y por la derecha.

c) ¿Tiene f inversa en su dominio? ¿Por qué? Si consideramos la función f definida en el intervalo $[-3, 0)$, obtener la función inversa f^{-1} y su dominio.

1.8) Calcular, empleando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{2^x - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\log(1+x)}$$

1.9) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) ¿Es continua por la izquierda en $x = 0$? ¿Es continua por la derecha en $x = 0$? ¿Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$? Razonar las respuestas.
- b) Obtener todas las asíntotas de f .

1.10) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La función siguiente es continua en $x = 1$ por la izquierda y no lo es por la derecha.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- b) Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional que tiene una asíntota horizontal, entonces el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
- c) La composición de dos funciones reales de variable real siempre define una función real de variable real.
- d) La ecuación $\operatorname{sen}(x) - x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

1.11) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) ¿Es f derivable por la derecha en $x = 0$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x = 0$? ¿Es f derivable en $x = 0$? Razonar las respuestas.
- b) Obtener la función derivada de f en los puntos donde exista.

1.12) Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$
- b) $f(x) = e^{-|x|}$
- c) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$
- d) $f(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$; $f(x) = x^3$ si $x < 0$
- e) $f(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$

1.13) ¿Se puede aplicar Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in (0, 1]$, $f(0) = -1$ en $[0, 1]$?

1.14)

- a) Encontrar una función f definida en $[-1, 1]$ que no satisfaga alguna de las hipótesis del teorema de Rolle, y sin embargo verifique $f'(c) = 0$ para algún $c \in (-1, 1)$.
- b) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$?
- c) Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) + 3x - 1$ tiene una única raíz real y encontrar un intervalo de longitud menor que dos que la contenga.

1.15) Calcular los siguientes límites por la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right] ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

1.16) Determinar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3(x-1)$.

1.17) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje X y está inscrito en el triángulo determinado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - 2x$.

1.18) Sea $f(x) = xe^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

- a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad lateral (por la izda y por la dcha) de f en $x = 0$.
- b) Determinar los puntos críticos, los intervalos de monotonía y los extremos relativos de f . ¿existe el máximo ó el mínimo absoluto de f ? Razonar la respuesta.

1.19) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) Si $f(x) = x - \operatorname{tg}(x)$ entonces $f(0) = 0$ es un punto de inflexión.
- b) Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz real.

1.20) Sea

$$f(x) = e^{-x} + |x+1| = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

- ¿Es f continua en $x = -1$? ¿Es f derivable por la derecha en $x = -1$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x = -1$? ¿Es f derivable en $x = -1$? Razonar las respuestas a partir del cálculo de los límites correspondientes.
- Obtener las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ en los puntos donde existan y determinar los puntos críticos de f .
- Estudiar la existencia de extremos (relativos y absolutos) y de puntos de inflexión.
- Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 asociado a f en el punto $x_0 = 0$.

1.21) Dada la función $f(x) = (x-1)^2 + (1-x)\operatorname{sen}(x) - \cos(x) - 1$

- Aproximar, por Taylor, la función f en un entorno del cero mediante un polinomio P de grado dos y acotar el error $|f(0.1) - P(0.1)|$.
- Obtener los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función f . ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $f(x) = 0$?

1.22) Resolver el apartado c) del ejercicio 5) usando el cálculo diferencial.