

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 4

1) Hallar el dominio de las siguientes funciones y representar gráficamente el conjunto correspondiente.

$$\text{a) } f(x, y) = \sqrt{1 - xy} \quad ; \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \quad ; \quad \text{c) } f(x, y) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{4 - y^2}$$

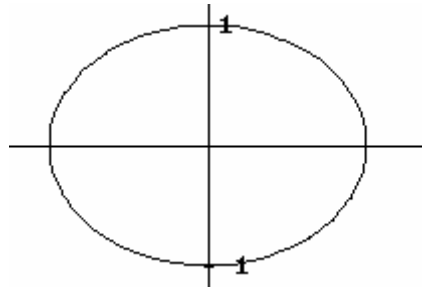
Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Dom } f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - xy \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 1\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq \frac{1}{x}, x < 0 \right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \end{aligned}$$

Se deja al lector la representación gráfica

$$\text{b) } \text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - (x^2 + y^2) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$$

es el conjunto de puntos del plano tales que su distancia al origen de coordenadas es menor que 1, es decir, es el entorno abierto de centro $(0, 0)$ y radio 1. Dicho de otra manera, es el conjunto de puntos interiores a la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1.



$$\begin{aligned} \text{c) } \text{Dom } f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9 - x^2 \geq 0, 4 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 9, y^2 \leq 4\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-3, 3] \text{ e } y \in [-2, 2]\} = [-3, 3] \times [-2, 2] \end{aligned}$$

producto cartesiano de los intervalos $[-3, 3]$, $[-2, 2]$, es decir, el rectángulo siguiente:



2) Calcular, si existen, los límites dobles en el $(0, 0)$ de las siguientes funciones. En todos ellos se ha de comenzar calculando los límites direccionales a través de rectas y, si es necesario, se ha de calcular también algún límite direccional a través de una curva.

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{2x + y^2}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \quad ; \quad \text{e) } f(x, y) = \frac{x^4 y^3}{x^8 + y^6}$$

Solución.

a)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + m^2 x}{(1 + m^2)x}$$

El límite anterior no existe ya que el límite por la derecha es $+\infty$ y el límite por la izquierda es $-\infty$. Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$ no existe.

Nota.

Es muy sencillo de comprobar que el límite direccional a través de la recta $x = 0$ es igual a 1. Por el contrario, el límite direccional a través de la curva $x = y^2$ es igual a 3. Así pues, tenemos otra forma de justificar que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe.

b)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xm^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2 x}{1 + m^2} = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Probemos con alguna curva

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2 y^2}{y^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{y^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = x^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xx^4}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{1 + x^2} = 0$$

Intentemos demostrar que el límite doble es 0.

$$\begin{aligned} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - 0 &= \frac{2r \cos(\alpha) r^2 \sin^2(\alpha)}{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha)} = \frac{2r^3 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha)}{r^2} = 2r \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) = \\ &= h(r) \cdot g(\alpha) \quad \text{siendo } h(r) = 2r \quad \text{y} \quad g(\alpha) = \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} 2r = 0$$

$$g \text{ es acotada ya que } |\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)| = |\cos(\alpha)| \cdot |\sin(\alpha)| \cdot |\sin(\alpha)| \leq 1$$

Efectivamente, el límite doble en el $(0, 0)$ es igual a 0.

c)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^2 x^2}{x^4 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{(1 + m^4)x^4} = \frac{m^2}{1 + m^4}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que los límites direccionales a través de rectas son distintos, al depender de la pendiente de la recta.

d)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + m^2 x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + m^2 x^2)(\sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 1} + 1)}{x^2 + m^2 x^2 + 1 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 1} + 1 = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 2. Probemos con alguna curva

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y^2 = x}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x^2 + x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x + 1} + 1 = 2 \end{aligned}$$

Intentemos demostrar que el límite es 2.

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} - 2 = \frac{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha) + 1} - 1} - 2 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} - 2 =$$

$$= h(r) \cdot g(\alpha) \quad \text{siendo } h(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} - 2 \quad \text{y} \quad g(\alpha) = 1$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} - 2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\sqrt{r^2 + 1} + 1)}{r^2} - 2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r^2 + 1} + 1 - 2 = 0$$

g es acotada trivialmente

Efectivamente, el límite doble en el $(0, 0)$ es igual a 2.

e)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 m^3 x^3}{x^8 + m^6 x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x}{x^2 + m^6} = \frac{0}{m^6} = 0 \quad \text{si } m \neq 0$$

$$\text{Si } m = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = 0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^8 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Probemos con alguna curva

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2 = y^3}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6 y^3}{y^{12} + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^6 + 1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^4 = y^3}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 y^3}{y^6 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que no todos los límites direccionales son iguales.

$$3) \text{ Sea } f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad ; \quad f(0,0) = 0$$

a) Comprobar que el límite doble de f en el $(0, 0)$ es igual a 0.

b) Obtener, si existen, las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$: $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$

c) Obtener $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$.

Solución.

a)

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 = \frac{r^3 \cos^3(\alpha) - r^3 \sin^3(\alpha)}{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha)} = \frac{r^3 (\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha))}{r^2} = r (\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)) =$$

$$= h(r).g(\alpha) \quad \text{siendo } h(r) = r \quad \text{y} \quad g(\alpha) = \cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

$$g \text{ es acotada ya que } |\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)| \leq |\cos^3(\alpha)| + |\sin^3(\alpha)| \leq 1 + 1 = 2$$

$$\text{Está comprobado que } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Nota:

$$\text{Hemos usado las desigualdades: } |a - b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$|\cos^3(\alpha)| = |\cos(\alpha)| \cdot |\cos(\alpha)| \cdot |\cos(\alpha)| \leq 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

b) Hay que recurrir a la definición de derivada parcial en un punto:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} ; \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1$$

Nota.

Si el límite respectivo no es finito se dice que no existe la derivada parcial.

c) Para calcular las derivadas parciales en un punto distinto del $(0, 0)$ no es necesario recurrir a la definición.

$$\text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_x(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_x(1, 0) = 1$$

$$\text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_y(x, y) = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_y(1, 0) = 0$$

4) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$ en el cuadrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$$

Solución.

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y - 3x^2y - y^3 = x - x^3 - 3xy^2 = 0$$

Es evidente que el punto $(0, 0)$ verifica simultáneamente las dos ecuaciones. Dividiendo una ecuación por "y" y la otra por "x" resulta: $1 - 3x^2 - y^2 = 1 - x^2 - 3y^2 = 0$

$$1 - 3x^2 - y^2 = 1 - x^2 - 3y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x, y = -x$$

$$\text{Si } y^2 = x^2, \quad 1 - 3x^2 - x^2 = 1 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2, x = -1/2$$

Así pues, existen cinco puntos que anulan simultáneamente a las dos derivadas parciales:

$$(0, 0), (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2) \text{ y } (-1/2, -1/2)$$

de los cuales solamente dos pertenecen al cuadrado C : $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$. El primero de ellos pertenece a la frontera del conjunto y el segundo pertenece al interior. Los restantes puntos críticos hay que buscarlos entre los puntos frontera del conjunto; analizamos por separado cada uno de los cuatro segmentos que componen dicha frontera y restringimos la función a cada uno de esos segmentos. Se obtienen así cuatro funciones de una variable, definida cada una de ellas en un intervalo cerrado de la recta real.

Sea $g(x) = f(x, 0) = 0$, $x \in [0, 1] \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x$, es decir, los puntos de la forma $(x, 0)$ con $x \in [0, 1]$ son puntos críticos.

Sea $g(y) = f(0, y) = 0$, $y \in [0, 1] \Rightarrow g'(y) = 0 \quad \forall y$, es decir, los puntos de la forma $(0, y)$ con $y \in [0, 1]$ son puntos críticos.

Sea $g(x) = f(x, 1) = x - x^3 - x = -x^3$, $x \in [0, 1] \Rightarrow g'(x) = -3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, es decir, los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1)$ son puntos críticos.

Sea $g(y) = f(1, y) = y - y - y^3 = -y^3$, $y \in [0, 1] \Rightarrow g'(y) = -3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, es decir, los puntos $(1, 0)$ y $(1, 1)$ son puntos críticos.

Así pues, los puntos críticos son, además de $(1/2, 1/2)$, los puntos de la forma $(x, 0)$ con $x \in [0, 1]$, los puntos de la forma $(0, y)$ con $y \in [0, 1]$ y el punto $(1, 1)$.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \quad ; \quad f(x, 0) = f(0, y) = 0; \quad f(1, 1) = -1$$

El máximo absoluto es $\frac{1}{8}$ y el mínimo absoluto es -1 .