Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 4. FUNCIONES DE DOS VARIABLES

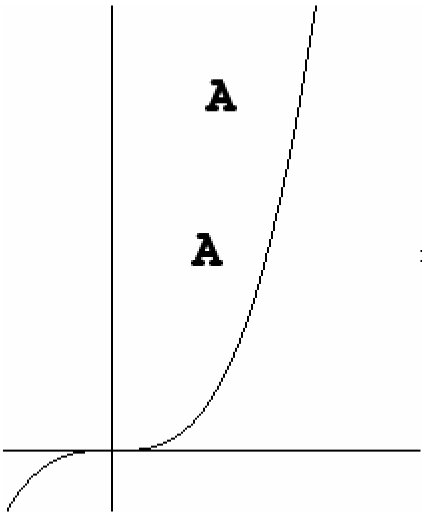
4.1: El plano R^2

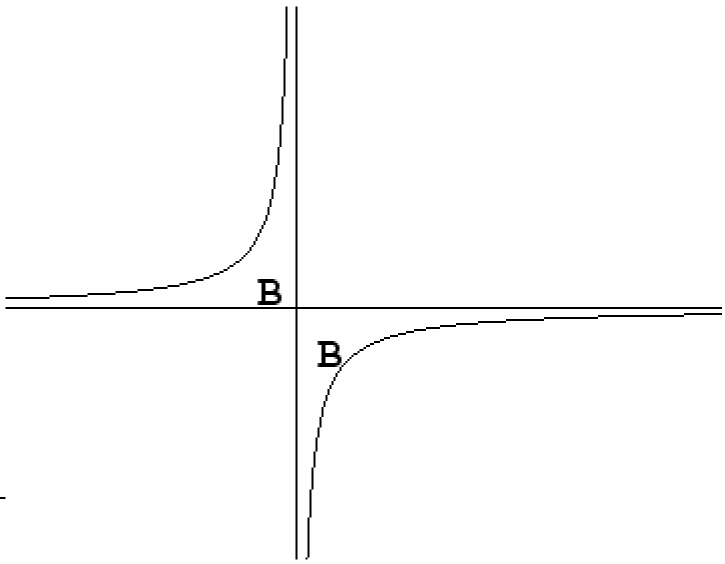
$R^2 = \{(x, y) / \ x \in R \text{ e } y \in R\}$ conjunto de todos los pares ordenados de números reales

Ejercicio:

Sean $A = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y \ge x^3, x \ge 0, y \ge 0\}$, $B = \{(x, y) \in R^2 \ / \ -1 \le xy \le 0\}$

Representar gráficamente los dos conjuntos anteriores





A está formado por los puntos del primer cuadrante situados "por encima" de la curva $y = x^3$. B está formado por los puntos del segundo cuadrante situados "por debajo" de la curva $y = -1/x$ y también por los puntos del cuarto cuadrante situados "por encima" de la curva $y = -1/x$.

Distancia en R^2

Dados dos puntos del plano $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, se define

$$d(P, Q) = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Entorno cerrado y entorno abierto.

Se define entorno cerrado centrado en $(x_0, y_0) \in R^2$ y radio $r \in R^+$ como el conjunto de los puntos del plano cuya distancia al centro es menor o igual a r. Se define entorno abierto centrado en $(x_0 , y_0) \in R^2$ y radio $r \in R^+$ como el conjunto de los puntos del plano cuya distancia al centro es menor a r.

$$E^c((x_0 , y_0), r) = \left\{(x , y) \in R^2 \ / \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$ ≡ círculo de radio r y centro (x_0 , y_0).

$$E^a((x_0 , y_0), r) = \left\{(x , y) \in R^2 \ / \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

4.2: Funciones de dos variables.

Se llama función real de dos variables reales a toda aplicación $f : D \subset R^2 \to R$, donde D es un conjunto de puntos del plano denominado *dominio* de la función. Designaremos por (x , y) a un elemento de D y por $z = f(x , y)$ a su *imagen* por la aplicación f.

$$Dom\ f = \left\{(x , y) \in R^2 \ / \ f(x , y) \in R\right\} \quad , \quad \mathrm{Im}\ f = \left\{z \in R \ / \ \exists (x, y) \in D,\ f(x, y) = z\right\}$$

Ejemplos:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad Dom\ f = R^2 - \{(0 , 0)\}$$

$$f(x, y) = \log(x.y) \ ; \quad Dom\ f = \left\{(x , y) \in R^2 \ / \ x > 0 , y > 0\right\} \cup \left\{(x , y) \in R^2 \ / \ x < 0 , y < 0\right\}$$

El conjunto de todos los puntos de R^3 de la forma $(x , y , f(x, y))$ con $(x , y) \in D$ forman una superficie que constituye la representación la *gráfica* de la función f.

4.3: Límite de una función de dos variables.

Límite doble de una función de dos variables en un punto: definición.

Sean $f : D \subset R^2 \to R$ y (x_0 , y_0) un punto de acumulación de D, es decir, en todo entorno de (x_0 , y_0) existen puntos de D diferentes de (x_0 , y_0). La función f tiene límite $l \in R$ en el punto (x_0 , y_0) si " $f(x, y)$ está tan próximo a l como queramos siempre que (x, y) este suficientemente próximo a (x_0 , y_0)".

La definición rigurosa es la siguiente:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad \begin{matrix} 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \\ (x, y) \in D \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

δ depende, en general, de ε y del punto (x_0, y_0).
El límite es independiente de que la función este o no definida en el punto (x_0, y_0).

Límites direccionales.

a) *Límites direccionales a través de rectas.*

Consideremos una recta que pase por (x_0, y_0) con ecuación: $y = y_0 + m(x - x_0)$. Si nos aproximamos al punto (x_0, y_0) a través de una recta cualquiera que pase por ese punto, podemos ver hacía qué valor se aproxima la función $f(x, y)$ sin más que calcular un límite unidimensional.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y = y_0 + m(x-x_0)}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f\left(x, y_0 + m(x-x_0)\right)$$

En caso de que el límite doble de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) sea igual a l, se verifica que todos los límites direccionales a través de rectas pasando por (x_0, y_0) también son iguales a l. Por tanto, en caso de que los límites direccionales a través de rectas dependan del valor de la pendiente m, resulta que el límite doble no existe, ya que cada recta tiene una pendiente diferente.

Si resulta que los límites direccionales a través de rectas son todos iguales a un valor l, podemos asegurar que el límite doble, en caso de que exista, ha de ser igual a l. Ahora bien, no podemos estar seguros de que exista el límite doble.

Ejemplos.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0,0)$ no existe ya que los límites direccionales a través de rectas son distintos, al depender de la pendiente de la recta.

$$f(x,y) = \frac{x}{x + y^4} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x + m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+m^4x^3} = 1$$

Concluimos que el límite doble en el $(0,0)$, en caso de que exista, es igual a 1. Pero no tenemos la certeza de que realmente exista el límite doble. En breve, saldremos de dudas.

b) *Límites direccionales a través de curvas.*

Consideremos una curva que pase por $(x_0\,,\mathrm{y}_0)$. Si nos aproximamos al punto $(x_0\,,\mathrm{y}_0)$ a través de dicha curva, podemos ver hacía qué valor se aproxima la función $f(x,y)$ sin más que calcular un límite unidimensional. En el caso de que este límite direccional sea distinto del que se hubiera obtenido mediante rectas se concluye que el límite doble en $(x_0\,,\mathrm{y}_0)$ no existe.

Ejemplo:

$$f(x,y)=\frac{x}{x+y^4} \qquad\qquad (x_0\,,\mathrm{y}_0)=(0\,,0)$$

Sabemos que el límite doble en el $(0\,,0)$, en caso de que exista, es igual a 1. Consideremos ahora diferentes curvas pasando por $(0\,,0)$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^7}=1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^2,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y^2}=1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^4}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^4,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite doble en el $(0\,,0)$ no existe ya que no todos los límites direccionales son iguales.

c) *Límites direccionales a través de rectas y curvas.*

En el caso de que los límites direccionales a través de rectas y diferentes curvas sean coincidentes a un valor l, no podemos asegurar con certeza que exista el límite doble; lo único seguro es que, en caso de que exista, ha de ser igual a l.

Ejemplo:

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^2} \qquad\qquad (x_0\,,\mathrm{y}_0)=(0\,,0)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{xm^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m^3x^2}{1+m^2}=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^2,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^5}{y^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^2+1}=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^3,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^6}{y^6+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{x^7}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{1+x^2} = 0$$

No conseguimos encontrar una curva, a través de la cual el límite direccional sea distinto de 0. Por tanto, debemos pensar en la posibilidad de que realmente existe el límite doble. ¿Cómo se demostraría?

Una posibilidad es pasar de las coordenadas rectangulares $(x\,,y)$ a las llamadas coordenadas polares $(r\,,\alpha)$. Si se trata de calcular el límite doble en el punto $(x_0\,,\mathrm{y}_0)$, las ecuaciones que definen el cambio de coordenadas son:

$$x = x_0 + r\cos(\alpha) \quad , \quad y = y_0 + r\,sen(\alpha) \qquad r>0 \qquad \alpha\in[0\,,2\pi)$$

Condición suficiente para garantizar la existencia de límite doble de f en $(x_0\,,\mathrm{y}_0)$

Si $\quad f(x\,,y) - l = f\big(x_0 + r\cos(\alpha)\,,\mathrm{y}_0 + r\,sen(\alpha)\big) - l = g(\alpha).h(r)\,,$

siendo $g\,(\alpha)$ acotada y $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$, entonces

$$0 \le \left| f(x\,,y) - l\right| = \left|g(\alpha).h(r)\right| = \left|g(\alpha)\right|.\left|h(r)\right| \le C.\left|h(r)\right| \quad , \quad C\in R^+$$

y en este caso podemos asegurar que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \qquad\qquad (x_0\,,\mathrm{y}_0) = (0\,,0)$$

$$\frac{xy^3}{x^2+y^2} - 0 = \frac{r\cos(\alpha)\,r^3\,sen^3(\alpha)}{r^2\cos^2(\alpha) + r^2\,sen^2(\alpha)} = \frac{r^4\cos(\alpha)\,sen^3(\alpha)}{r^2} = r^2\cos(\alpha)\,sen^3(\alpha)$$

$h(r) = r^2$ verifica $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \lim\limits_{r\to 0} r^2 = 0$

$g(\alpha) = \cos(\alpha)\,sen^3(\alpha)$ es acotada ya que $\left|\cos(\alpha)\,sen^3(\alpha)\right| = \left|\cos(\alpha)\right|.\left|sen^3(\alpha)\right| \le 1$

Hemos demostrado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$

Continuidad de una función de dos variables.

Sean $f : D \subset R^2 \to R$ y (x_0 , y_0) un punto de acumulación de D, es decir, en todo entorno de (x_0 , y_0) existen puntos de D diferentes de (x_0 , y_0).

$$f \text{ es continua en } (x_0 , y_0) \Leftrightarrow : \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Teorema de Weierstrass.

Sea D un conjunto cerrado y acotado. Si f es continua en D, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en dicho conjunto.

4.4: Derivabilidad de una función de dos variables.

Derivadas parciales de primer orden

Se dice que una función $f : D \subset R^2 \to R$ tiene derivada parcial de primer orden con respecto a la variable "x" en un punto (x_0 , y_0) perteneciente al interior de D, si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h , y_0) - f(x_0 , y_0)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada parcial de primer orden de la función f con respecto a la variable "x" en el punto (x_0 , y_0), y se denota por $f_x(x_0 , y_0)$ ó $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Se dice que una función $f : D \subset R^2 \to R$ tiene derivada parcial de primer orden con respecto a la variable "y" en un punto (x_0 , y_0) perteneciente al interior de D, si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 , y_0 + h) - f(x_0 , y_0)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada parcial de primer orden de la función f con respecto a la variable "y" en el punto (x_0 , y_0), y se denota por $f_y(x_0 , y_0)$ ó $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ejemplo:

Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 + 3y - x + 2$ en el punto $(0 , 0)$ son:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h + 2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} h - 1 = -1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h+2-2}{h} = 3$$

Nota 1.
Las derivadas parciales anteriores también se pueden obtener aplicando las reglas de derivación conocidas.

$$f_x(x,y) = 2x - 1 \ \Rightarrow\ f_x(0,0) = -1$$
$$f_y(x,y) = 3 \ \Rightarrow\ f_y(0,0) = 3$$

Nota 2
En algunas ocasiones hay que recurrir necesariamente a la definición para calcular las derivadas parciales de una función en un punto.

Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad ; \quad f(0,0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Derivadas parciales de segundo orden.

$$f_{xx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$

$$f_{yy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$

Extremos relativos.

Para determinar los extremos relativos de una función de dos variables primeramente obtenemos, si existen, los puntos (x_0, y_0) tales que $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (puntos críticos).

Para cada uno de los puntos críticos (x_0, y_0) obtenidos, calculamos el determinante siguiente:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).

Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en (x_0, y_0).

Si $D < 0$, entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$$

$$f_x(x, y) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ; \quad f_y(x, y) = 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

El único punto crítico es $(0, 1)$

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{yx}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(0,1) > 0$$

Así pues, f alcanza un mínimo local en el punto $(0, 1)$.

Extremos absolutos.

Si la función es continua y el dominio es un conjunto cerrado y acotado, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en dicho conjunto. Tanto el máximo como el mínimo se puede alcanzar en un punto interior del dominio o bien en un punto perteneciente a la frontera. Supongamos que la frontera del conjunto está formada por cuatro segmentos.

Se calculan, si existen, los puntos interiores al dominio que anulan simultáneamente a sus derivadas parciales primeras. Por otra parte, se restringe la función a cada uno de los cuatro segmentos y resultan cuatro funciones de una variable definidas en un intervalo cerrado; para estas funciones aplicamos lo estudiado en el tema 1.

De esta manera, evaluamos la función en los puntos obtenidos; algunos de ellos pueden pertenecer al interior del conjunto y el resto serán puntos pertenecientes a los bordes. El máximo buscado será lógicamente el valor mayor de los que resulten después de realizar las sucesivas evaluaciones; análogamente el mínimo.