

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 3

1)

- a) Definir sucesión $\{a_n\}$ de números reales estrictamente creciente y acotada superiormente.
 b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ de números reales siguiente es convergente:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Solución:

- a) $\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
 $\{a_n\}$ es acotada superiormente $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad / \quad a_n \leq M \quad \forall n$

b) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} ; \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{7}{12}, \quad a_3 = \frac{37}{60}, \dots$

Demostremos que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente, es decir, $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$ ó
 equivalentemente $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} > 0 \quad \forall n \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente,

$$n+1 < n+2 < \dots < n+n \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots > \frac{1}{n+n} ; \text{ por tanto } a_n < n \frac{1}{n+1} < 1 \quad \forall n$$

Por ser creciente y acotada superiormente resulta que es convergente.

- 2) Para cada una de las sucesiones siguientes decir si es convergente, divergente u oscilante.
 Obtener el límite, en su caso.

a) $\{a_n\} = (-1)^n \frac{n^4 - n^3 + 2n - 1}{n^3 + 1}$

b) $\{a_n\} = \frac{3n^2 + (-1)^n}{2n^2}$

c) $\{a_n\} = (-1)^n + \frac{n}{n+1}$

Solución.

$$a) \quad |a_n| = \left| \frac{n^4 - n^3 + 2n - 1}{n^3 + 1} \right| = \left| \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \right| \rightarrow +\infty$$

Por tanto, es una sucesión *divergente*

b) La sucesión $\left\{(-1)^n \frac{1}{2n^2}\right\} \rightarrow 0$ ya que es producto de una sucesión acotada $\{(-1)^n\}$ por otra convergente a cero. Así pues,

$$\{a_n\} = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2n^2} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{convergente}$$

c) Si n es par, $\{a_n\} = (-1)^n + \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{n}{n+1} \rightarrow 2$

Si n es impar, $\{a_n\} = (-1)^n + \frac{n}{n+1} = -1 + \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$

Esto demuestra que la sucesión no es convergente.

$$|a_n| = \left| (-1)^n + \frac{n}{n+1} \right| \leq |(-1)^n| + \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1 + \frac{n}{n+1}$$

La sucesión $\left\{1 + \frac{n}{n+1}\right\}$ no tiende a $+\infty$; esto demuestra que $|a_n|$ tampoco y en consecuencia la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente. Es *oscilante*

3) Enunciar el teorema de la sucesión intermedia y calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$$

Solución:

Supongamos que para todo n suficientemente grande $b_n \leq a_n \leq c_n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ y

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$ ó $l = \pm\infty$)

$$\text{Sea } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$n^2 < (n+1)^2 < \dots < (2n)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} > \dots > \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\text{Por tanto } a_n \geq \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} = \frac{n+1}{(2n)^2}, \quad a_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

4)

Se define la sucesión $\{a_n\}$ de números reales por:

$$a_1 = 1/4 ; a_{n+1} = -(a_1 + a_n^2), \text{ si } n \geq 1$$

Estudiar la monotonía y acotación. ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite.

Solución:

$$a_1 = 1/4 = 0.25 ; a_2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = -\frac{5}{16} \approx -0.31 ; a_3 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{25}{256}\right) = -\frac{89}{256} \approx -0.34$$

Demostraremos, por inducción, que la sucesión es estrictamente decreciente, es decir,

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n$$

$$\text{Si } n=1 \quad a_1 = 0.25 > -0.31... = a_2 \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > a_{n+1}$ y demostraremos que $a_{n+1} > a_{n+2}$

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \quad \text{y} \quad a_n < 0 \quad \forall n \geq 2 &\Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2 \Rightarrow a_1 + a_n^2 < a_1 + a_{n+1}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(a_1 + a_n^2) > -(a_1 + a_{n+1}^2) \end{aligned}$$

Por ser decreciente, está acotada superiormente por $a_1 = 0.25$. Veamos que está acotada inferiormente, es decir, $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m \quad \forall n$; lo demostraremos por inducción.

$$\text{Si } n=1 \quad a_1 = 0.25 > -\frac{1}{2} ; \text{ supongamos, por hipótesis de inducción, que } a_n > -\frac{1}{2} \text{ y}$$

demostraremos que $a_{n+1} > -\frac{1}{2}$.

$$a_n > -\frac{1}{2}, \quad a_n < 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 + a_n^2 < a_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow -(a_1 + a_n^2) > -\frac{1}{2}$$

$$\{a_n\} \text{ decreciente y acotada inferiormente} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l \in \mathbb{R}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_1 + a_n^2\} = -\frac{1}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n^2\} = -\frac{1}{4} - l^2$$

$$l^2 + l + \frac{1}{4} = 0 \quad ; \quad l = -\frac{1}{2}$$

5) Se define la sucesión $\{a_n\}$ de números reales por:

$$a_1 = 4 ; a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \quad \text{si } n \geq 1$$

a) Demostrar, por inducción, que $a_n > 4 \quad \forall n > 1$.

b) Utilizar que $a_n \geq 4$ para demostrar (sin aplicar inducción) que la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.

c) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ no puede tener límite finito.

Solución:

a)

$$a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{9}{2} = 4.5, \quad a_3 = \frac{49}{8} = 6.125, \dots$$

Si $n = 2$ $a_2 = 4.5 > 4$ ciertoSupongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > 4$ y demostraremos que $a_{n+1} > 4$

$$a_n > 4 \Rightarrow a_n - 1 > 3 \Rightarrow (a_n - 1)^2 > 9 \Rightarrow \frac{(a_n - 1)^2}{2} > \frac{9}{2} > 4$$

b)

 $\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow : a_n < a_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 1}{2} = \frac{a_n(a_n - 4) + 1}{2} > 0$$

ya que $a_n \geq 4 > 0$ y $a_n - 4 \geq 0$

c)

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l \in \mathbb{R}$; en este caso $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\} = \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} - 1)^2}{2} =$

$$= \frac{(l - 1)^2}{2} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 1 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} < 4$$

El límite de la sucesión no puede ser un número menor que cuatro ya que todos los términos de la sucesión son mayores o iguales que cuatro: $a_1 = 4$, $a_2 > a_1$, $a_3 > a_2$, ...Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = +\infty$ 6) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = 3/4; \quad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}, \quad n \geq 1$$

y la sucesión $\{b_n\}$ cuyo término general es $\frac{4n - 3}{\sqrt[3]{8n^2 + 2n - 1}}$ a) Demostrar, por inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ está bien definida y que todos sus elementos son positivos, es decir, que $a_n < 1$ y $a_n > 0 \quad \forall n$.b) Demostrar, sin aplicar inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente.sugerencia: usar que $1 - x = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 + x}$ c) ¿Es convergente la sucesión $\{a_n\}$? En caso afirmativo calcular el límite. ¿Es convergente la sucesión $\{b_n\}$? Justificar las respuestas.

Solución.

$$a_1 = 3/4 = 0.75, \quad a_2 = 1 - \sqrt{1/4} = 1/2 = 0.5, \quad a_3 = 1 - \sqrt{1/2}$$

a)

$$a_n < 1 \quad \forall n$$

Para $n = 1$, $a_1 = \frac{3}{4} < 1$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < 1$ y demostraremos que $a_{n+1} < 1$

$$a_n < 1 \Rightarrow 1 - a_n > 0 \Rightarrow \sqrt{1 - a_n} > 0 \Rightarrow -\sqrt{1 - a_n} < 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - a_n} < 1$$

$$a_n > 0 \quad \forall n$$

Para $n = 1$, $a_1 = \frac{3}{4} > 0$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > 0$ y demostraremos que $a_{n+1} > 0$

$$a_n > 0 \Rightarrow -a_n < 0 \Rightarrow 1 - a_n < 1 \Rightarrow \sqrt{1 - a_n} < 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - a_n} > 0$$

b)

$$\{a_n\} \text{ es estrictamente decreciente} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0 \quad \forall n$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - (1 - \sqrt{1 - a_n}) = a_n - \frac{(1 - \sqrt{1 - a_n})(1 + \sqrt{1 - a_n})}{1 + \sqrt{1 - a_n}} = a_n - \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 - a_n}} = \\ &= \frac{a_n \sqrt{1 - a_n}}{1 + \sqrt{1 - a_n}} > 0 \quad \text{ya que } a_n > 0 \text{ y } \sqrt{1 - a_n} > 0 \end{aligned}$$

c) Por ser decreciente y acotada inferiormente $\{a_n\}$ es convergente. Sea l el límite. Resulta:

$$l = 1 - \sqrt{1 - l} \Leftrightarrow \sqrt{1 - l} = 1 - l \Rightarrow 1 - l = 1 - 2l + l^2 \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ó } l = 1$$

$l \neq 1$ ya que $a_1 = 0.75$ y la sucesión decrece. Por tanto $l = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{\sqrt[3]{8n^2 + 2n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n}}{\sqrt[3]{\frac{8}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}} = \frac{4}{0} = \infty$$

$\{b_n\}$ no es convergente; es una sucesión divergente.

7) Estudiar el carácter de las series siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum \frac{\log(n)}{n} \quad & \text{b) } \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad & \text{c) } \sum \left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n \quad & \text{d) } \sum \frac{1}{(2n-1)2n} \\ \text{e) } \sum \left(\frac{n}{3n-2} \right)^{2n-1} \quad & \text{f) } \sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n \quad & \text{g) } \sum \frac{2^n}{n} \quad & \text{h) } \sum \frac{n+1}{2n+1} \quad & \text{i) } \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \end{aligned}$$

Solución.

a) Usamos el teorema de comparación en el límite con la serie $\sum \frac{1}{n}$ que es divergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)/n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n) = \infty ; \text{ por tanto la serie dada también diverge.}$$

b) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} : \frac{1}{n} = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow 1$; por el teorema de comparación, las dos series

convergen o divergen simultáneamente. Así pues la serie dada es divergente.

c) Usamos el criterio de la raíz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{La serie es convergente.}$$

d) $\frac{1}{(2n-1)2n} : \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{4n^2-2n} \rightarrow \frac{1}{4}$ y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por tanto la serie dada es convergente.

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1 \quad \text{convergente (criterio de la raíz).}$$

f) Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2}{5} \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{2}{5} < 1 \quad \text{convergente}$$

g) Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n} = 2 \frac{n}{n+1} \rightarrow 2 > 1 \quad \text{la serie es divergente}$$

También se puede ver que no es convergente comprobando que el término general de la serie no converge a cero.

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ la serie no es convergente. Al ser una serie de términos positivos es divergente a $+\infty$.

$$\text{i) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2.4.6...(2n+2)(2n+4)} \frac{2.4.6...(2n+2)}{1.3.5...(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+4} \rightarrow 1$$

El criterio del cociente no decide; aplicamos Raabe.

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+4} \right) = \frac{3n}{2n+4} \rightarrow \frac{3}{2} > 1 \quad \text{convergente}$$

8) Sumar las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{10^n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4^n}$$

Solución.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{10^n} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = 6 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{3}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}$$

c)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \rightarrow \frac{1}{4} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad \text{aritmético-geométrica convergente ya que } \frac{1}{4} \in (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{6}{4^3} + \dots + \frac{n+2}{4^{n-1}} + \frac{n+3}{4^n} + \dots \\ \frac{1}{4}S &= \frac{4}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{n+2}{4^n} + \dots \end{aligned}$$

$$S - \frac{1}{4}S = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}S = \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12} \quad ; \quad S = \frac{13}{9}$$

