

CALCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

TEMA 3. SUCESIONES Y SERIES

3.1: Sucesiones numéricas.

Sucesiones de números reales: monotonía, acotación y convergencia.

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación $f : N \rightarrow R$. El elemento $f(1)$ se denomina primer término de la sucesión; el elemento $f(2)$ segundo término, etc. Llamamos término general de la sucesión al n -ésimo término $f(n)$.

Cuando hablemos de la sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ se entenderá que nos referimos a una cierta aplicación $f : N \rightarrow R$ con $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$. Para abreviar denotaremos por $\{a_n\}$ a la sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$.

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, denominamos sucesión suma a la sucesión que tiene por término general la suma de los términos generales de las sucesiones dadas. Análogamente se define la sucesión producto y la sucesión cociente.

$$\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \quad ; \quad \{a_n b_n\} = \{a_n\} \{b_n\} ; \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} \quad \text{si } b_n \neq 0 \quad \forall n$$

Definiciones.

$$\begin{aligned} \{a_n\} \text{ es monótona creciente} & \Leftrightarrow : a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \\ \{a_n\} \text{ es monótona decreciente} & \Leftrightarrow : a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \\ \{a_n\} \text{ es estrictamente creciente} & \Leftrightarrow : a_n < a_{n+1} \quad \forall n \\ \{a_n\} \text{ es estrictamente decreciente} & \Leftrightarrow : a_n > a_{n+1} \quad \forall n \\ \{a_n\} \text{ está acotada superiormente} & \Leftrightarrow : \exists M \in R / a_n \leq M \quad \forall n \\ \{a_n\} \text{ está acotada inferiormente} & \Leftrightarrow : \exists m \in R / a_n \geq m \quad \forall n \end{aligned}$$

$$\{a_n\} \text{ está acotada} \Leftrightarrow : \text{está acotada superiormente e inferiormente} \Leftrightarrow \exists K \in R^+ / |a_n| \leq K \quad \forall n$$

Ejercicio:

Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \frac{n}{n+1}$

Solución:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

Veamos que es estrictamente creciente, es decir, $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Por tanto está acotada inferiormente por $a_1 = \frac{1}{2}$ que es el ínfimo del conjunto de los elementos de la sucesión.

$\frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n$; así pues la sucesión está también acotada superiormente. Un cota superior es el 1 (que además es el supremo y el límite de la sucesión).

Ejercicio:

Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \frac{2n}{n^3 - 1}$, $n \geq 2$

Solución:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{4}{7}, \frac{3}{13}, \frac{8}{63}, \dots \right\} \approx \{0.57, 0.23, 0.12, \dots\}$$

Veamos que es estrictamente decreciente, es decir, $a_n - a_{n+1} > 0$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{n^3 - 1} - \frac{2(n+1)}{(n+1)^3 - 1} = \frac{2n(n^3 + 3n^2 + 3n) - 2(n+1)(n^3 - 1)}{(n^3 - 1)(n^3 + 3n^2 + 3n)} = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n + 2}{(n^3 - 1)(n^3 + 3n^2 + 3n)} > 0$$

$\forall n \geq 2$

Por tanto está acotada superiormente por $a_1 = \frac{4}{7}$ que es el supremo del conjunto de los elementos de la sucesión.

$\frac{2n}{n^3 - 1} > 0 \quad \forall n \geq 2$; así pues la sucesión está también acotada inferiormente. Un cota inferior es el 0 (que además es el ínfimo y el límite de la sucesión).

Ejercicio:

Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

Definición de límite de una sucesión.

Se dice que un número real l es límite de una sucesión $\{a_n\}$ y se denota $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l$ ó $\{a_n\} \rightarrow l \Leftrightarrow: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$ y se denota $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{a_n\} = +\infty$ ó $\{a_n\} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow:$

$$\forall M \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n > M$$

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $-\infty$ y se denota $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{a_n\} = -\infty$ ó $\{a_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow:$

$$\forall m \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n < m$$

Ejemplos.

$$\{a_n\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad , \quad \{a_n\} = \left\{ \frac{n^2}{3} \right\} \rightarrow +\infty \quad \{a_n\} = \left\{ -\frac{n^2}{3} \right\} \rightarrow -\infty$$

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ que posee límite finito se dice que es *convergente*, es decir,

$$\exists l \in \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l$$

Definición.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *divergente* si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

Ejemplos.

$\{a_n\} = n$ es divergente (tiene límite $+\infty$)

$\{a_n\} = -n$ es divergente (tiene límite $-\infty$)

$\{a_n\} = (-1)^n n = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$ es divergente, aunque no tiene límite.

Definición.

Una sucesión se llama *oscilante* si no es convergente ni divergente.

Ejemplo:

$$\{a_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$$

Definición.

Se dice que $\{a_{r_n}\}$ es una *subsucesión* de $\{a_n\}$ si $\{r_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

- Si una sucesión tiene límite, finito o infinito, es único.
- Toda sucesión convergente es acotada. El recíproco, en general, es falso.
- Si una sucesión tiene límite, finito o infinito, todas sus subsucesiones tienen también el mismo límite.
- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Además el límite coincide con el supremo del conjunto de los términos de la sucesión.
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente. Además el límite coincide con el ínfimo del conjunto de los términos de la sucesión.
- Toda sucesión monótona creciente y no acotada superiormente tiene límite $+\infty$.
- Toda sucesión monótona decreciente y no acotada inferiormente tiene límite $-\infty$.

Ejemplo:

La sucesión $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ es creciente y acotada superiormente; por tanto es convergente y su límite es un número real (irracional) que se llama el número e (base de los logaritmos neperianos).
 $e \approx 2.7182$

Operaciones con límites de sucesiones.

Si $\{a_n\} \rightarrow l \in \mathbb{R}$ y $\{b_n\} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow l + m$$

$$\{\alpha \cdot a_n\} \rightarrow \alpha \cdot l \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\{a_n b_n\} \rightarrow lm$$

$$\left\{ \frac{1}{b_n} \right\} \rightarrow \frac{1}{m} \quad y \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow \frac{l}{m} \quad \text{si } m \neq 0 \quad y \quad b_n \neq 0 \quad \forall n$$

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \text{ es divergente si } l \neq 0, \quad m = 0 \quad y \quad b_n \neq 0 \quad \forall n$$

Si alguno o ambos de los límites l y m es infinito se verifican análogos resultados a los vistos para límites de funciones.

Ejemplos.

$$\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{n^5 - 3n^3} = \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}}{1 - \frac{3}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1 - 4n^7}{n^7 + 12n} = \frac{\frac{1}{n^7} - 4}{1 + \frac{12}{n^6}} \rightarrow \frac{-4}{1} = -4$$

$$\frac{n^4 - 3n^2 + n + 2}{n^3 + 7n} = \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{\frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Se verifica $\{a_n\} \rightarrow l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a_n - l\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|a_n - l|\} \rightarrow 0$. En particular,
 $\{a_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|a_n|\} \rightarrow 0$

Ejemplo:

La sucesión $\left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\}$ es convergente a cero ya que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ lo es.

Ejercicio:

Justificar que la sucesión de números reales $\{a_n\} = (-1)^n \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$ no es convergente. ¿es divergente? ¿es oscilante? Razonar las respuestas.

Teorema de la sucesión intermedia.

Supongamos que para todo n suficientemente grande $b_n \leq a_n \leq c_n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$ ó $l = +\infty$ ó $l = -\infty$)

Ejercicio.

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

Solución:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} ; \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \Rightarrow a_n \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow 1$$

$$a_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$$

Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Corolario.

Si $\{a_n\} \rightarrow 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\{a_n b_n\} \rightarrow 0$

En efecto, $0 \leq |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq K |a_n|$ y basta aplicar el teorema de la sucesión intermedia.

Algunos límites importantes.

* Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$ entonces $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$. Así, por ejemplo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

* Si $p > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$

* Si $p > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^p} = 0$ n^p ($p > 0$) es un infinito de orden superior a $\log n$

* Si $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Sucesiones recurrentes.

La forma recurrente de representar una sucesión consiste en dar uno o varios términos iniciales de la sucesión e indicar la fórmula para calcular los términos sucesivos a partir de los dados.

Ejemplos.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n \cdot a_n \quad n \in \mathbb{N} \quad \{1, 1, 2, 6, 24, \dots\}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \quad \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \text{ Fibonacci}$$

Para calcular el límite de una sucesión definida de este modo, una posibilidad es intentar demostrar la existencia de dicho límite mediante técnicas de monotonía y acotación, usando para dichas técnicas generalmente el principio de inducción, y a continuación, para encontrar su valor se pueden tomar límites en la expresión que define la sucesión.

Por ejemplo, para demostrar que una sucesión recurrente es estrictamente creciente mediante inducción comprobamos en primer lugar que $a_1 < a_2$; a continuación suponemos, por hipótesis de inducción, que $a_n < a_{n+1}$ y demostramos que también $a_{n+1} < a_{n+2}$. Para demostrar que es acotada superiormente, por inducción, tenemos que encontrar una constante M que cumpla en primer lugar que $a_1 < M$; a continuación suponemos, por hipótesis de inducción, que $a_n < M$ y demostramos que también $a_{n+1} < M$.

Ejercicio.

Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} \quad n \geq 1$$

Demostrar, por inducción, que es monótona y acotada. Calcular su límite.

Solución:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad a_4 = \frac{7}{4} = 1.75, \quad a_5 = \frac{15}{8} = 1.875, \quad a_6 = \frac{31}{16} \approx 1.9375$$

Demostraremos, por inducción, que es estrictamente creciente, es decir, $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$

$$\text{Si } n = 1 \quad a_1 = 0 < 1 = a_2 \quad \text{cierto}$$

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < a_{n+1}$ y demostraremos que $a_{n+1} < a_{n+2}$

1ª posibilidad

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{2} < \frac{a_{n+1}}{2} \Rightarrow 1 + \frac{a_n}{2} < 1 + \frac{a_{n+1}}{2}, \text{ es decir, } a_{n+1} < a_{n+2}$$

2ª posibilidad

Por hipótesis de inducción $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 1 + \frac{a_{n+1}}{2} - \left(1 + \frac{a_n}{2}\right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} > 0, \text{ es decir, } a_{n+1} < a_{n+2}$$

Por ser creciente está acotada inferiormente por $a_1 = 0$. Veamos que está acotada superiormente, es decir,

$\exists M \in \mathbb{R} / a_n \leq M \quad \forall n$; lo demostraremos por inducción.

Si $n = 1$ $a_1 = 0 < 2$; supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < 2$ y demostraremos que $a_{n+1} < 2$

$$a_n < 2 \Rightarrow \frac{a_n}{2} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{a_n}{2} < 2, \text{ es decir, } a_{n+1} < 2$$

$\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente, es decir, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{a_n}{2} \right\} = 1 + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{2}, \text{ es decir, } l = 1 + \frac{l}{2}; \text{ así pues } l = 2$$

Ejercicio.

Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente:

$$a_1 = 1/2; \quad 7a_{n+1} = a_n^3 + 6, \text{ si } n \geq 1$$

Estudiar la monotonía y acotación. ¿Es convergente? En caso afirmativo hallar el límite. ¿Es convergente si $a_1 = 5/2$? Razonar las respuestas.

3.2: Series numéricas.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y formemos una nueva sucesión $\{s_n\}$ de la forma:

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

La sucesión así formada se llama serie y se representa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. El número s_n es la suma parcial n-ésima de la serie y el número a_n es el término n-ésimo de la serie.

Convergencia y suma de una serie.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*, *divergente* u *oscilante* según que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ sea convergente, divergente u oscilante respectivamente.

Si $\{s_n\}$ converge a l , diremos que l es la *suma* de la serie y escribiremos: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$

Si $\{s_n\} \rightarrow +\infty$, se denota $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$; si $\{s_n\} \rightarrow -\infty$, se denota $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$

El carácter de una serie no se altera si se suprimen un número finito de sumandos.

Ejemplos:

$$* \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$* \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{oscilante} \quad ; \quad s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

La serie geométrica.

$$\text{Si } |a| < 1, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}. \quad \text{Si } |a| > 1 \text{ ó } a = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \text{ es divergente.}$$

Si $a = -1$ la serie es oscilante.

Demostración.

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a + a^2 + \dots + a^n \quad ; \quad a \cdot s_n = a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1}$$

$$(1-a)s_n = a - a^{n+1}. \text{ Así pues, si } a \neq 1, \quad s_n = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$$

$$\text{Si } |a| < 1, \text{ entonces } a^{n+1} \rightarrow 0 \text{ y por tanto } s_n \rightarrow \frac{a}{1-a}$$

Si $|a| > 1$, entonces a^{n+1} es divergente y por tanto s_n es divergente

$$\text{Si } a = 1, \quad s_n = n \rightarrow +\infty \text{ divergente. Si } a = -1, \quad s_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Ejemplos.

$$* \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$* \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$* \quad \text{Si } |a| < 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

Condición necesaria de convergencia.

Condición necesaria (no suficiente) para que una serie sea convergente es que el término general de la misma converja a cero.

Ejemplos.

$$* \quad \text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \text{ no es convergente, puesto que } \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$* \quad \text{La serie armónica } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ es divergente puesto que } s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$$

Operaciones con series.

* Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = m$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = l + m$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot l$

- * Si una serie es convergente, su carácter y su suma no varían al sustituir grupos de términos consecutivos por sus sumas.
- * Si una serie es divergente, lo sigue siendo al sustituir grupos de términos consecutivos por sus sumas.
- * Para series oscilantes lo anterior, en general, no se verifica.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{oscilante} \quad \begin{aligned} &(-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 0 \\ &-1 + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots = -1 \end{aligned}$$

Series con términos no negativos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

- * Una serie con términos no negativos es convergente $\Leftrightarrow$ la sucesión de sumas parciales es acotada.

" $\Rightarrow$ " $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ convergente y por tanto acotada.

" $\Leftarrow$ " $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ acotada (por hipótesis), monótona creciente (por ser $a_n \geq 0$) y en consecuencia, s_n es convergente.

- * Una serie con términos no negativos es convergente o bien divergente a $+\infty$, pero nunca es oscilante. En efecto, al ser s_n monótona creciente, se verifica que s_n es convergente o bien divergente a $+\infty$.

Ejemplo.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ llamada serie armónica generalizada converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

- * Teorema de comparación en el límite

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [1] y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [2] dos series con términos positivos / $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. Se verifica:

- Si $l > 0$ y $l \neq \infty$ las dos series convergen o divergen simultáneamente.
- Si $l = 0$ y la serie [2] converge entonces la serie [1] también converge. Si $l = 0$ y la serie [1] diverge entonces la serie [2] también diverge.
- Si $l = +\infty$ y la serie [2] diverge entonces la serie [1] también diverge. Si $l = +\infty$ y la serie [1] converge entonces la serie [2] también converge.

Ejemplos.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+7)}}$ es divergente ya que $\frac{1/\sqrt{n(n+7)}}{1/n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}} \rightarrow 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es diverg.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ es convergente ya que $\frac{1/(n \cdot 2^n)}{1/2^n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente

Criterio de la raíz.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Si $0 \leq l < 1$ la serie es convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$ es convergente ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n^{1/n} - 1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/n} - 1) = 0$

Criterio del cociente.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Si $l < 1$ la serie es convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente ya que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

Criterio del Raabe.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$. Si $l > 1$ la serie es convergente. Si $l < 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Ejercicio:

Comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \dots (1+\sqrt{n})}$ es convergente (el criterio del cociente no decide y se ha de usar el criterio de Raabe).

Series de términos arbitrarios: series alternadas.

Se llaman series alternadas aquellas en las que dos términos consecutivos tienen signos opuestos, es decir, $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0 \quad \forall n$. La forma más común que presentan las series alternadas es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots \quad ; \quad a_n \geq 0$$

Criterio de Leibniz.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números no negativos, es decir, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ y, además, convergente a cero. Se verifica que la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

es convergente.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ es convergente.}$$

* A continuación consideraremos series arbitrarias, es decir, series que no son necesariamente ni de términos no negativos ni alternadas.

Definición.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* $\Leftrightarrow$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

* Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

$$\text{En efecto: } \forall n \quad -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \text{ es convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente.} \end{aligned}$$

* El recíproco del resultado anterior, en general, no es cierto. Así, por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente y no es absolutamente convergente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Definición.

Las series que son convergentes, pero no absolutamente convergentes, se llaman *condicionalmente convergentes*.

Suma de algunas series.

* *Serie geométrica.*

$$\text{Si } |a| < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$$

* *Series aritmético- geométricas.*

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)a^n$, siendo $P(n)$ un polinomio, se denomina aritmético- geométrica. Si $|a| < 1$

es convergente. Si llamamos S a su suma, se verifica $S - aS = k + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n)a^n$ donde k es una constante y Q un polinomio de grado menor que P . Reiterando el proceso se obtiene una serie geométrica.

* *Series telescópicas.*

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica si a_n puede escribirse en la forma: $a_n = b_n - b_{n+1}$ y por tanto la suma parcial es $s_n = b_1 - b_{n+1}$.

La serie anterior converge si la sucesión $\{b_n\}$ converge y en este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$