

TEMA 3

SUCESIONES Y SERIES

INDICE

- Objetivos.
- Sucesiones numéricas.
- Series numéricas.

OBJETIVOS

- Manejar los conceptos de sucesión y serie y utilizar las series de potencias para representar las funciones.

Sucesiones Numéricas

Sucesiones de números reales: monotonía, acotación y convergencia

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. El elemento $f(1)$ se denomina primer término de la sucesión y llamamos término general de la sucesión al enésimo término $f(n)$

Cuando hablemos de la sucesión $\{a_1, a_2 \dots a_n \dots\}$ la podemos denotar como $\{a_n\}$

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ denominamos sucesión suma a la sucesión que tiene por término general la suma de los términos generales

$$\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \quad ; \quad \{a_n b_n\} = \{a_n\} \{b_n\} ; \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} \quad \text{si } b_n \neq 0 \quad \forall n$$

Sucesiones Numéricas

Sucesiones de numeros reales: monotonía, acotación y convergencia

Definiciones:

$\{a_n\}$ es monótona creciente $\Leftrightarrow : a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

$\{a_n\}$ es monótona decreciente $\Leftrightarrow : a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow : a_n < a_{n+1} \quad \forall n$

$\{a_n\}$ es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow : a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

$\{a_n\}$ está acotada superiormente $\Leftrightarrow : \exists M \in \mathbb{R} / a_n \leq M \quad \forall n$

$\{a_n\}$ está acotada inferiormente $\Leftrightarrow : \exists m \in \mathbb{R} / a_n \geq m \quad \forall n$

$\{a_n\}$ está acotada $\Leftrightarrow : \text{está acotada superiormente e inferiormente} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}^+ / |a_n| \leq K \quad \forall n$

Sucesiones Numéricas

Definición de límite de una sucesión

Se dice que un número real l es límite de una sucesión $\{a_n\}$ y se denota:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l \Leftrightarrow: \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$ y se denota:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = +\infty \Leftrightarrow: \forall M \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad a_n > M$$

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $-\infty$ y se denota:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -\infty \Leftrightarrow: \forall m \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad a_n < m$$

Sucesiones Numéricas

Tipos de sucesiones

Una sucesión $\{a_n\}$ que posee límite finito se dice que es convergente, es decir

$$\exists l \in \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l$$

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es divergente si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$$

Una sucesión se llama oscilante si no es convergente ni divergente

Sucesiones Numéricas

Subsucesiones

Se dice que $\{a_{r_n}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ si $\{r_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales

- Si una sucesión tiene límite, finito o infinito, es único.
- Toda sucesión convergente es acotada. El recíproco, en general, es falso.
- Si una sucesión tiene límite, finito o infinito, todas sus subsucesiones tienen también el mismo límite.
- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Además el límite coincide con el supremo del conjunto de los términos de la sucesión.
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente. Además el límite coincide con el ínfimo del conjunto de los términos de la sucesión.
- Toda sucesión monótona creciente y no acotada superiormente tiene límite $+\infty$
- Toda sucesión monótona decreciente y no acotada inferiormente tiene límite $-\infty$

Sucesiones Numéricas

Operaciones con límites de sucesiones

Si $\{a_n\} \rightarrow l \in R$ y $\{b_n\} \rightarrow m \in R$ se verifica

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow l + m$$

$$\{\alpha \cdot a_n\} \rightarrow \alpha \cdot l \quad \forall \alpha \in R$$

$$\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow l \cdot m$$

$$\{a_n\} \rightarrow l \in R \Leftrightarrow \{|a_n - l|\} \rightarrow 0 \quad \text{En particular, } \{a_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|a_n|\} \rightarrow 0$$

$$\left\{ \frac{1}{b_n} \right\} \rightarrow \frac{1}{m} \quad y \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow \frac{l}{m} \quad \text{si } m \neq 0 \text{ y } b_n \neq 0 \quad \forall n$$

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \text{ es divergente si } l \neq 0, m = 0 \text{ y } b_n \neq 0 \quad \forall n$$

Sucesiones Numéricas

Teorema de la sucesión intermedia

Supongamos que para todo n suficientemente grande $b_n \leq a_n \leq c_n$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$ ó $l = +\infty$ ó $l = -\infty$)

Corolario:

Si $\{a_n\} \rightarrow 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow 0$

En efecto, $0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot |a_n|$ y basta aplicar el teorema de la sucesión intermedia

Sucesiones Numéricas

Algunos limites importantes

$$\text{Si } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \text{ entonces } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$$

$$\text{Si } p > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

$$\text{Si } p > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^p} = 0 \quad n^p \text{ es un inf mayor a } \log n$$

$$\text{Si } |a| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Sucesiones Numéricas

Sucesiones Recurrentes

La forma recurrente de representar una sucesión consiste en dar uno o varios términos iniciales de la sucesión e indicar la fórmula para calcular los términos sucesivos a partir de los dados

Ejemplos:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = n \cdot a_n \quad n \in N \quad \{1, 1, 2, 6, 24 \dots\}$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad n \in N \quad \{0, 1, 1, 2, 3, 5 \dots\}$$

Sucesiones Numéricas

Sucesiones Recurrentes

Para calcular el límite de una sucesión recurrente, podemos intentar demostrar la existencia de dicho límite mediante técnicas de monotonía y acotación, usando para ello el principio de inducción

Por ejemplo, para demostrar que una sucesión recurrente es estrictamente creciente mediante inducción comprobamos en primer lugar que $a_1 < a_2$.
A continuación suponemos por hipótesis de inducción que $a_n < a_{n+1}$ y demostramos que también $a_{n+1} < a_{n+2}$

Series Numéricas

Introducción

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y formemos una nueva sucesión $\{s_n\}$ de la forma:

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

La sucesión así formada se llama serie y se representa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

El número s_n es la suma parcial n -ésima de la serie

El número a_n es el término n -ésimo de la serie

Series Numéricas

Convergencia y suma de una serie

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, divergente u oscilante según que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ sea convergente, divergente u oscilante

Si $\{s_n\} \rightarrow l$ diremos que l es la suma de la serie y escribiremos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = l$

Si $\{s_n\} \rightarrow +\infty$, se denota $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$. Si $\{s_n\} \rightarrow -\infty$, se denota $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$

El carácter de una serie no se altera si se suprimen un número finito de sumandos

Series Numéricas

La serie geométrica

Si $|r| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$

Si $|r| > 1$ ó $r = 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ es *divergente*

Si $r = -1$ la serie es oscilante

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Series Numéricas

La serie geométrica (Demostración)

$$s_n = \sum_{k=1}^n r_k = r + r^2 + \dots + r^n \quad ; \quad r \cdot s_n = r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$$

$$(1-r) \cdot s_n = r - r^{n+1}. \text{ Así pues, si } r \neq 1 \quad s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$$

$$\text{Si } |r| < 1, \text{ entonces } r^{n+1} \rightarrow 0 \text{ y entonces } s_n \rightarrow \frac{r}{1-r}$$

Si $|r| > 1$, entonces r^{n+1} es divergente y entonces s_n es divergente

Si $r = 1$, $s_n = n \rightarrow +\infty$ divergente

$$\text{Si } r = -1 \quad s_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Series Numéricas

Condición necesaria de Convergencia

La condición necesaria (no suficiente) para que una serie sea convergente es que el término general de la misma converja a cero

Ejemplos:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ no es convergente, puesto que $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$
- La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente puesto que $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$

Series Numéricas

Operaciones con Series

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = m$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = l + m$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot l$
- Si una serie es convergente, su carácter y su suma no varían al sustituir grupos de términos consecutivos por sus sumas
- Si una serie es divergente, lo sigue siendo al sustituir grupos de términos consecutivos por sus sumas
- Para series oscilantes lo anterior, en general, no se verifican

Series Numéricas

Series de Términos no Negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

Una serie de términos no negativos es convergente si y solo si, la sucesión de sumas parciales es acotada

Una serie con términos no negativos es convergente o bien divergente a $+\infty$ pero nunca es oscilante (debido a que s_n es monótona creciente)

Ejemplo:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ llamada serie armónica generalizada converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$

Series Numéricas

Series de Términos no Negativos

Criterio de Comparación en el Límite:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series con términos positivos tal que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$
- Se verifica que:
 - Si $l > 0$ y $l \neq \infty$ las dos series convergen o divergen simultáneamente
 - Si $l = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge
 - Si $l = +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge

Series Numéricas

Series de Términos no Negativos

Criterio de la raíz:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
- Se verifica que:
 - Si $0 \leq l < 1$ la serie es convergente
 - Si $l > 1$ la serie es divergente
 - Si $l = 1$ el criterio no decide

Series Numéricas

Series de Términos no Negativos

Criterio del cociente:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
- Se verifica que:
 - Si $l < 1$ la serie es convergente
 - Si $l > 1$ la serie es divergente
 - Si $l = 1$ el criterio no decide

Series Numéricas

Series de Términos no Negativos

Criterio de Raabe:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$
- Se verifica que:
 - Si $l > 1$ la serie es convergente
 - Si $l < 1$ la serie es divergente
 - Si $l = 1$ el criterio no decide

Series Numéricas

Series de Términos Arbitrarios (Series Alternadas)

Una serie alternada es aquella en la que dos términos consecutivos tienen signos apostos. La forma más común que presentan estas series es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots \quad ; \quad a_n \geq 0$$

Criterio de Leibniz:

- Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números no negativos, es decir, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ y, además, convergente a cero.

Se verifica que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente

Series Numéricas

Definiciones

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Leftrightarrow$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Las series que son convergentes, pero no absolutamente convergentes, se llaman condicionalmente convergentes

Series Numéricas

Suma de algunas series

Serie geométrica

- Si $|a| < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$

Series aritmético-geométricas

- La serie aritmetico-geometrica tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) \cdot a^n$ siendo $P(n)$ un polinomio
 - Si $|a| < 1$ es convergente
 - Si llamamos S a su suma, se verifica $S - aS = k + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n) \cdot a^n$ donde k es una constante y Q un polinomio de grado menor que P

Series Numéricas

Suma de algunas series

Series telescópicas

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica si a_n puede escribirse en la siguiente forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ y por tanto la suma parcial es $s_n = b_1 - b_{n+1}$
- Esta serie converge si la sucesión $\{b_n\}$ converge y en este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$