

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 2

1) Calcular las siguientes integrales indefinidas (inmediatas):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \int \frac{6x+1}{3x^2+x+25} dx & \text{b)} \quad \int \frac{5x^4}{1+x^{10}} dx & \text{c)} \quad \int \sin(7x) dx \\ \text{d)} \quad \int 2^{3x} dx & \text{e)} \quad \int \frac{\log(x)}{x} dx & \text{f)} \quad \int \tan(2x) dx \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \int \frac{6x+1}{3x^2+x+25} dx = \log|3x^2+x+25| + C \\ \text{b)} \quad \int \frac{5x^4}{1+x^{10}} dx = \int \frac{5x^4}{1+(x^5)^2} dx = \arctg(x^5) + C \\ \text{c)} \quad \int \sin(7x) dx = \frac{1}{7} \int 7 \sin(7x) dx = -\frac{1}{7} \cos(7x) + C \\ \text{d)} \quad \int 2^{3x} dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot 2^{3x} dx = \frac{1}{3} \frac{2^{3x}}{\log 2} + C \\ \text{e)} \quad \int \frac{\log(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \log^2(x) + C \\ \text{f)} \quad \int \tan(2x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2} \log(\cos(2x)) + C \end{array}$$

2) Obtener, por cambio de variable, las siguientes integrales indefinidas :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \int x(2x+3)^7 dx & \text{b)} \quad \int \frac{1}{x \cdot \log(x)} dx \\ \text{c)} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx & \text{d)} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } 2x+3=t \quad ; \quad x=\frac{t-3}{2}=g(t) \quad ; \quad g'(t)=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int x(2x+3)^7 dx &= \int \frac{t-3}{2} t^7 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^8 - 3t^7) dt = \frac{1}{36} t^9 - \frac{3}{32} t^8 + C = \\ &= \frac{1}{36} (2x+3)^9 - \frac{3}{32} (2x+3)^8 + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \log(x)=t \quad ; \quad x=e^t=g(t) \quad ; \quad g'(t)=e^t$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \log(x)} dx = \int \frac{1}{e^t \cdot t} e^t dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\log(x)| + C$$

$$\text{c) } x=2\operatorname{sen}(t)=g(t) \quad ; \quad g'(t)=2\cos(t)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{8\operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(t)}} 2\cos(t) dt = \int \frac{8\operatorname{sen}^3(t)}{2\cos(t)} 2\cos(t) dt = 8 \int \operatorname{sen}^3(t) dt = \\ &= 8 \int \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}^2(t) dt = 8 \int \operatorname{sen}(t) (1 - \cos^2(t)) dt = 8 \int \operatorname{sen}(t) dt - 8 \int \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dt = \\ &= -8\cos(t) + 8 \frac{\cos^3(t)}{3} + C = -8\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \frac{8}{3} \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right)^3 + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sqrt{x}=t \quad ; \quad x=t^2=g(t) \quad ; \quad g'(t)=2t$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \log(t+1)) + C = \\ &= 2(\sqrt{x} - \log(\sqrt{x}+1)) + C \end{aligned}$$

3) Obtener, por el método de integración por partes, las siguientes integrales indefinidas.

$$\text{a) } \int x^3 \cdot \log(x) dx \quad \text{b) } \int \log(x) dx \quad \text{c) } \int e^{2x} \cdot \cos(x) dx$$

Solución:

$$\text{a) } u = \log(x) \quad ; \quad dv = x^3 dx \quad ; \quad du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad v = \frac{1}{4} x^4$$

$$\int x^3 \cdot \log(x) dx = \frac{1}{4} x^4 \log(x) - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \log(x) - \frac{1}{16} x^4 + C$$

$$\text{b)} \quad u = \log(x) \quad ; \quad dv = dx \quad ; \quad du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad v = x$$

$$\int \log(x) dx = x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log(x) - x + C = x(\log(x) - 1) + C$$

$$\text{c)} \quad u = e^{2x} \quad ; \quad dv = \cos(x) dx \quad ; \quad du = 2e^{2x} dx \quad ; \quad v = \sin(x)$$

$$I = \int e^{2x} \cdot \cos(x) dx = e^{2x} \sin(x) - \int 2e^{2x} \sin(x) dx$$

$$u = 2e^{2x} \quad ; \quad dv = \sin(x) dx \quad ; \quad du = 4e^{2x} \quad ; \quad v = -\cos(x)$$

$$I = e^{2x} \sin(x) - \left[-2e^{2x} \cos(x) - \int -4e^{2x} \cos(x) \right] = e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cos(x) - 4I$$

$$5I = e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cos(x) \quad ; \quad I = \frac{1}{5} e^{2x} [\sin(x) + 2 \cos(x)] + C$$

4) Calcular las integrales de funciones racionales siguientes:

$$\text{a)} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{b)} \quad \int \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} dx$$

Solución:

a)

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ó} \quad x = 3 \quad , \text{ es decir, } \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \quad ;$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad ; \quad Ax - 3A + Bx + B = 1$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow -A - 3A = 1 \Rightarrow A = -1/4$$

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow 3B + B = 1 \Rightarrow B = 1/4$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} &= \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{4} \log|x+1| + \frac{1}{4} \log|x-3| + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

b)

$$(x-1)(x^2 + 2x + 1) = (x-1)(x+1)^2 \quad ; \quad \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) = x^2 + x + 2$$

$$\text{Si } x=1 \Rightarrow 4A=4 \Rightarrow A=1 \quad ; \quad \text{Si } x=-1 \Rightarrow -2C=2 \Rightarrow C=-1$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow A-B-C=2 \Rightarrow B=A-C-2=0$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x^2+2x+1)} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \log|x-1| + \frac{1}{x+1} + C$$

5) Demostrar, utilizando la propiedad de monotonía de la integral, que:

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$$

Solución:

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 = e^0 \leq e^{x^2} \leq e^1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Por la propiedad de monotonía resulta que $\int_0^1 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e dx$, es decir,

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$$

6) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4 + 25} dt \quad \text{b) } F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^4 + 25} dt \quad \text{c) } \int_0^{\cos(x)} \frac{t}{t^3 + 1} dt$$

Solución:

a)

$$F'(x) = \frac{1}{x^4 + 25}$$

b)

$$F'(x) = 2x \frac{1}{x^8 + 25}$$

$$\text{c) } F'(x) = -\sin(x) \frac{\cos(x)}{\cos^3(x) + 1}$$

7) Calcular los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \sin(t^2) dt}{\tan(x)} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \sin \sqrt{t^{2/3}} dt}{x^4} \quad (x \rightarrow 0)$$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \operatorname{sen}(t^2) dt}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen}(9x^2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \operatorname{sen} \sqrt{t^{2/3}} dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen} \sqrt{x^2}}{4x^3} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = -1$$

Por tanto el límite pedido no existe

8) Utilizar la fórmula del cambio de variable en la integral definida para calcular:

a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

b) $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$

Solución:

a)

$x = 2 \operatorname{sen}(t) = g(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ tal que $g(\alpha) = 0$, $g(\beta) = 1$ y g ha de tener inversa en $[\alpha, \beta]$. Podemos elegir $\alpha = 0$ y $\beta = \pi/6$ ya que $2 \operatorname{sen}(0) = 0$, $2 \operatorname{sen}(\pi/6) = 1$ y la función $2 \operatorname{sen}(t)$ es inyectiva en $[0, \pi/6]$.

Sabemos que $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{4-4 \operatorname{sen}^2(t)} \cdot 2 \cos(t) dt = \int_0^{\pi/6} 2 \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} \cdot 2 \cos(t) dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/6} \cos^2(t) dt = 4 \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = 2 \int_0^{\pi/6} [1+\cos(2t)] dt = 2 \int_0^{\pi/6} dt + 2 \int_0^{\pi/6} \cos(2t) dt = \\ &= 2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \left(2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

b)

$x = tg(t) = g(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ tal que $g(\alpha) = 0$, $g(\beta) = 1$ y g ha de tener inversa en $[\alpha, \beta]$. Podemos elegir $\alpha = 0$ y $\beta = \pi/4$ ya que $tg(0) = 0$, $tg(\pi/4) = 1$ y la función $tg(t)$ es inyectiva en $[0, \pi/4]$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\pi/4} tg(t) \sqrt{tg^2(t) + 1} \sec^2(t) dt = \int_0^{\pi/4} tg(t) \sec(t) \sec^2(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sen(t)}{\cos^4(t)} dt = - \int_0^{\pi/4} \sen(t) \cos^{-4}(t) dt = - \frac{\cos^{-3}(t)}{-3} \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^3(\pi/4)} - \frac{1}{\cos^3(0)} \right) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

nota: $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

9) Demostrar que si f es una función integrable en $[-a, a]$, $a > 0$, entonces:

a) Si f es par $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

b) Si f es impar $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Solución:

a)

$$f \text{ es par} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad ; \quad \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx = (\text{cambio de variable } x = -t) = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

$$\text{Por tanto} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

b)

$$f \text{ es impar} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad ; \quad \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 -f(-x) dx = (\text{cambio de variable } x = -t) = \int_a^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$$

Por tanto:
$$\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0$$

10)

a) Sea f una función continua en $[a, b]$ que verifica $f(x) = f(a+b-x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Demostrar, aplicando cambio de variable, que
$$\int_a^b x \cdot f(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

b) Calcular, usando el apartado anterior,
$$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \text{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Solución:

a) $a+b-x=t \quad ; \quad x=a+b-t=g(t) \quad ; \quad g'(t)=-1$

$$\begin{aligned} \int_a^b x \cdot f(x)dx &= -\int_b^a (a+b-t) f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t) f(a+b-t)dt = \\ &= \int_a^b (a+b-t) f(t)dt = \int_a^b (a+b) f(t)dt - \int_a^b t \cdot f(t)dt \end{aligned}$$

Por tanto
$$\int_a^b x \cdot f(x)dx + \int_a^b t \cdot f(t)dt = \int_a^b (a+b) f(t)dt \quad , \text{ es decir,}$$

$$2 \int_a^b t \cdot f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt \quad ; \quad \int_a^b t \cdot f(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$$

b)

Sea $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)}$ continua en $[a, b] = [0, \pi]$

$$f(a+b-x) = f(\pi-x) = \frac{\text{sen}(\pi-x)}{1 + \cos^2(\pi-x)} = \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} = f(x)$$

Por tanto
$$\int_0^{\pi} x \cdot \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{-\text{sen}(x)}{1 + (\cos(x))^2} dx =$$

$$-\frac{\pi}{2} \arctg(\cos(x)) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} [\arctg(-1) - \arctg(1)] = -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

11)

Demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

Solución:

$$\text{Si } \alpha = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log(b) - \log(1)] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log(b) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha \neq 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = (*)$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty \quad \text{si } 1-\alpha > 0, \text{ es decir, si } \alpha < 1$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} = 0 \quad \text{si } 1-\alpha < 0, \text{ es decir, si } \alpha > 1$$

$$(*) = +\infty \quad \text{si } \alpha < 1 \quad ; \quad (*) = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 1$$

12)

a) Obtener una primitiva de la función $f(x) = e^{-ax} \cdot \cos(bx)$.

b) Si $a > 0$, demostrar que la integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(x) dx$ es convergente y calcular el valor de la integral.

Solución:

a) Vamos a aplicar el método de integración por partes.

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax} dx \quad ; \quad dv = \cos(bx) dx \Rightarrow v = \frac{1}{b} \sin(bx)$$

$$I = \int e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} \int e^{-ax} \sin(bx) dx$$

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax} dx \quad ; \quad dv = \sin(bx) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$$

$$I = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b} \int e^{-ax} \cos(bx) dx \right]$$

$$I = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} I$$

$$I = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \cos(bx) \right] = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-ax} [b \sin(bx) - a \cos(bx)]$$

b) Si elegimos $b = 1$ en la función del apartado anterior resulta que

$$\int e^{-ax} \cos(x) dx = \frac{1}{a^2 + 1} e^{-ax} [\operatorname{sen}(x) - a \cos(x)] + C$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-ax} \cos(x) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{a^2 + 1} e^{-ab} (\operatorname{sen}(b) - a \cos(b)) - \frac{1}{a^2 + 1} \cdot (-a) \right] = \frac{a}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Nota 1: $a > 0 \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-ab} = e^{-\infty} = 0$

Nota 2: $|\operatorname{sen}(b) - a \cos(b)| \leq |\operatorname{sen}(b)| + a |\cos(b)| \leq 1 + a$

Nota 3: el producto de una función que tiende a cero por otra acotada también tiende a cero.

13)

- Utilizar la integral definida para calcular el área de la circunferencia de radio r .
- Calcular el área de la región del plano delimitada por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = -1$.
- Hallar el área encerrada por la curva $y = |x^2 - 5x + 4|$ entre $x = 0$ y $x = 5$.
- Obtener el área determinada por la curva $y = \frac{2}{1 + 4x^2}$ y su asíntota horizontal.

Solución:

a) La ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de radio r es: $x^2 + y^2 = r^2$

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad ; \quad \text{cambio de variable } x = r \operatorname{sen}(t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(t)} \cdot r \cos(t) dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \\ &= 2r^2 \int_0^{\pi/2} [1 + \cos(2t)] dt = 2r^2 \left[\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt \right] = 2r^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(0) \right] = \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

b) $y = f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1$

puntos de corte con los ejes: $(0,0), (-1,0), (1,0)$

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$ puntos críticos

en $x = -1/\sqrt{3}$ $f''(x) = 6x < 0$ máximo relativo $= 2\sqrt{3}/9$

en $x = 1/\sqrt{3}$ $f''(x) > 0$ mínimo relativo

f es decreciente en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y creciente en $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ y hacia abajo en $(-\infty, 0)$. En $x = 0$ punto de inflexión.

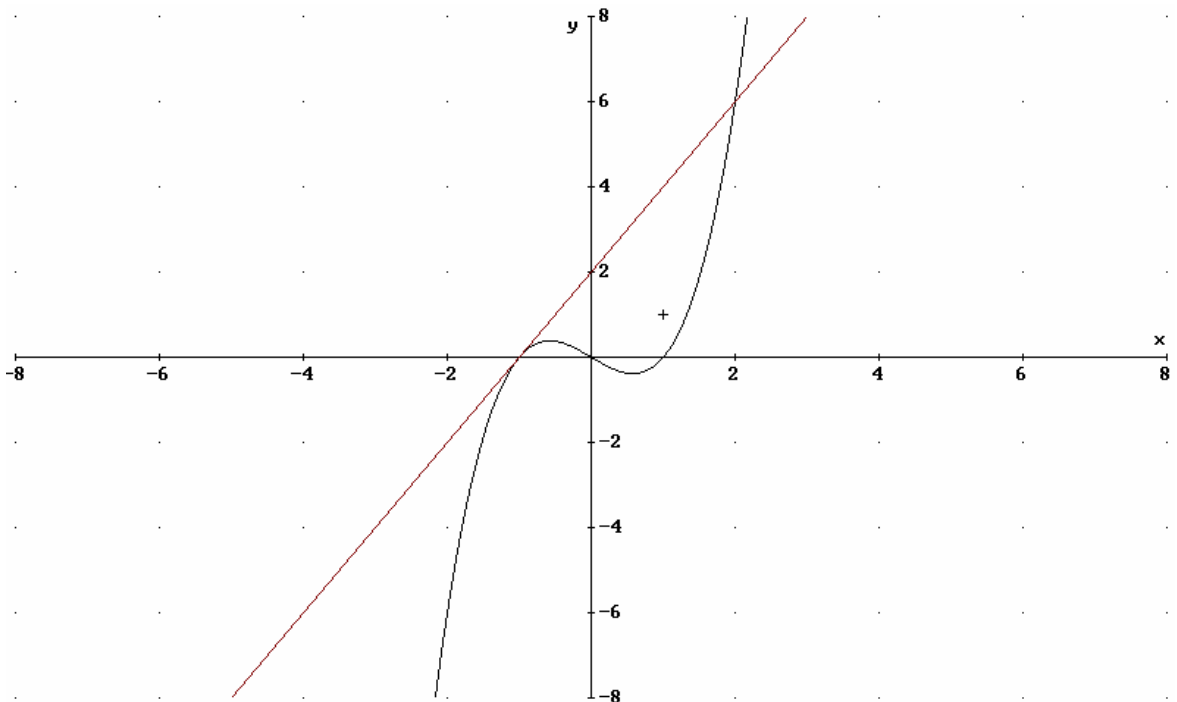
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^2 - 1) = -\infty$

La tangente en el punto de abscisa $x = -1$ tiene por ecuación:

$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1) = 0 + 2(x + 1) = 2x + 2$

Determinemos los puntos de corte de la curva y la tangente calculada (además de $x = -1$).

$x^3 - x = 2x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$; si dividimos este polinomio por $x + 1$ resulta como polinomio cociente: $x^2 - x - 2$ que se anula en $x = -1$ y $x = 2$.



En el intervalo $(-1, 2)$ la recta tangente anterior está por “encima” de la curva.

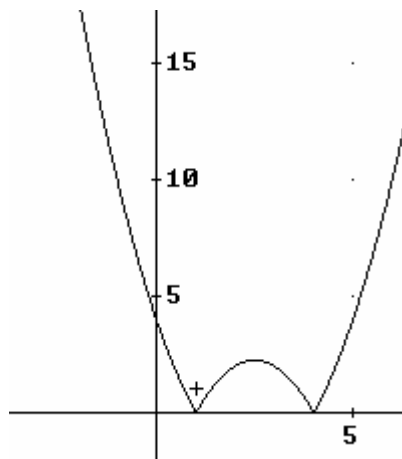
$$A = \int_{-1}^2 [(2x+2) - (x^3 - x)] dx = \int_{-1}^2 (3x+2-x^3) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 =$$

$$= 6 + 4 - 4 - \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{4}$$

c)

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad x = 4$$

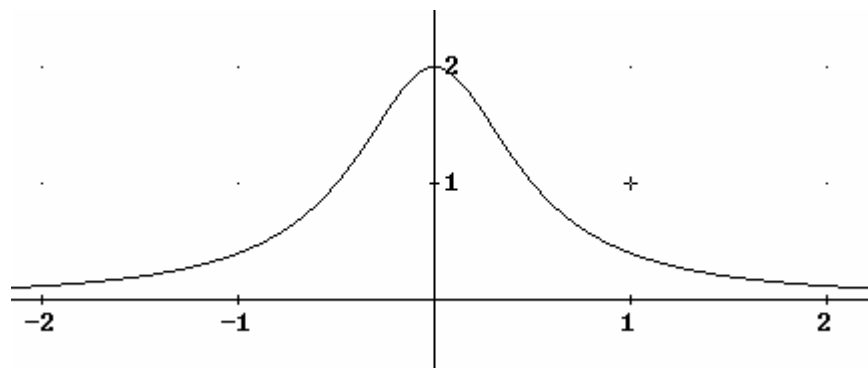
$$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad \text{ó} \quad x \geq 4 \quad ; \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$



$$A = \int_0^5 |x^2 - 5x + 4| dx = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx + \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx + \int_4^5 (x^2 - 5x + 4) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_4^5 = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{49}{6}$$

d)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+4x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad y = 0 \text{ asíntota horizontal por los dos lados}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+4x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+(2x)^2} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{2}{1+(2x)^2} dx = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg(2b) - \arctg(0)] = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(2b) = 2 \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

- 14) Calcular el volumen de un cono de radio de la base r y altura h usando que es un sólido de revolución.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{r}{h}x \quad x \in [0, h] \\ V &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$