

CALCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

TEMA 2. INTEGRAL DE RIEMANN

2.1: Cálculo de primitivas.

Concepto de primitiva:

Se dice que la función $F(x)$ es una función primitiva de la función $f(x) \Leftrightarrow$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

La función $f(x)$ recibe el nombre de integrando y sumando a $F(x)$ una constante arbitraria C , se obtiene otra función primitiva. Recíprocamente, dos primitivas cualesquiera de $f(x)$ solo se diferencian en una constante (suponiendo que el dominio sea un intervalo).

Al conjunto de primitivas de la función f se le llama la *integral indefinida* de f . Se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

con C constante arbitraria, siendo F una primitiva cualquiera de f .

Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$\begin{aligned} \int (f + g)(x)dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int a \cdot f(x)dx &= a \int f(x)dx \end{aligned}$$

siendo f y g dos funciones que admiten primitiva y $a \in \mathbb{R}$, es decir, la integral indefinida es un operador lineal.

Integrales inmediatas.

$$\int a dx = ax + C \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad ; \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1 \quad ; \quad \int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad ; \quad \int \text{sen}(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad ; \quad \int \cos(f(x)) f'(x) dx = \text{sen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int \sec^2(x) dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} f'(x) dx = \tan(f(x)) + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx &= -\operatorname{ctg}(x) + C & ; & \quad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(f(x))} f'(x) dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arcsen}(x) + C & ; & \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x) dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg}(x) + C & ; & \quad \int \frac{1}{1+(f(x))^2} f'(x) dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C \\
\int \operatorname{tg}(x) dx &= -\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = -\log(\cos(x)) + C \\
\int \operatorname{ctg}(x) dx &= \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx = \log(\operatorname{sen}(x)) + C
\end{aligned}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx &= \int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2} dx = \operatorname{arctg}(x^4) + C & ; & \quad \int \frac{8x+5}{4x^2+5x+1} dx = \log(4x^2+5x+1) + C \\
\int \cos(3x) dx &= \frac{1}{3} \int 3\cos(3x) dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + C & ; & \quad \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C \\
\int \frac{\log(x)}{x} dx &= \int \frac{1}{x} \log(x) dx = \frac{\log^2(x)}{2} + C & ; & \quad \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx = \frac{(\operatorname{arctg}(x))^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Métodos generales de integración: descomposición, cambio de variable y partes.

Descomposición:

$$\int (x^5 + 6x^3 - 4x^2 + 5) dx = \int x^5 dx + 6 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 5x + C$$

Integración por sustitución o cambio de variable.

Sea f una función que admite primitiva; si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ siendo g una función derivable con derivada continua, resulta:

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

Ejemplos:

*

$$\begin{aligned}
\int x(2x+1)^{10} dx &= \int \frac{t-1}{2} t^{10} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^{11} - t^{10}) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} \right) + C = \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{(2x+1)^{12}}{12} - \frac{(2x+1)^{11}}{11} \right) + C
\end{aligned}$$

$$\text{Se ha hecho el cambio } 2x+1=t, \text{ es decir, } x = \frac{t-1}{2} \quad dx = \frac{1}{2} dt$$

*

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$$

Se ha hecho el cambio $x^2 + 1 = t^2$ $t > 0$, es decir, $2x dx = 2t dt$ $x dx = t dt$

*

$$\int \frac{1}{x \cdot \log(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\log(x)| + C$$

Se ha hecho el cambio $\log(x) = t$, es decir, $x = e^t$ $\frac{1}{x} dx = dt$

Integración por partes:

Si f y g son dos funciones derivables en el punto x , sabemos que fg es derivable en x
 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, es decir, $f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= \int (fg)'(x) - f'(x)g(x) dx = (fg)(x) - \int f'(x)g(x) dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \end{aligned}$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$ entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$; la fórmula se puede escribir así:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplos:

*

$$\int e^{2x} \sen(x) dx = I \quad ; \quad u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx, \quad dv = \sen(x) dx, \quad v = -\cos(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \int e^{2x} \cos(x) dx \quad ; \quad u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx, \quad dv = \cos(x) dx, \quad v = \sen(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \left[e^{2x} \sen(x) - 2 \int e^{2x} \sen(x) dx \right] = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sen(x) - 4I$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} (2\sen(x) - \cos(x)) + C$$

*

$$\int \log(x) dx = I \quad ; \quad u = \log(x), \quad du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad dv = dx, \quad v = x$$

$$I = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x = x(\log(x) - 1) + C$$

Integración de funciones racionales.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{siendo } P \text{ y } Q \text{ polinomios}$$

Es suficiente estudiar el caso en que el grado de $P(x)$ sea menor que el grado de $Q(x)$, puesto que en caso contrario se realiza la división y existen polinomios $C(x)$ y $R(x)$, cociente y resto respectivamente, tales que $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$ con grado de $R(x) < \text{grado de } Q(x)$ y por tanto

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} dx = \int (x + 2) dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Así pues, supongamos que el grado de $P(x)$ es inferior al grado de $Q(x)$. Para hallar la integral se calculan las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$ y se descompone la fracción original en suma de fracciones simples. Distinguiremos los dos casos siguientes:

*

raíces reales simples : $a, b, c, \dots$; en este caso $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad ; \quad \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad , \quad Ax - A + Bx + B = 1$$

$$\text{Si } x = 1 \quad \quad 2B = 1 \quad \quad B = 1/2$$

$$\text{Si } x = -1 \quad \quad -2A = 1 \quad \quad A = -1/2$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

*

Supongamos que $Q(x) = 0$ tiene una raíz real a de orden de multiplicidad m ; en este caso

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots$$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2} dx$$

$$\frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2}$$

$$A_1(x-1)(x+2)(x+1)^2 + A_2(x+2)(x+1)^2 + B(x-1)^2(x+1)^2 + C_1(x-1)^2(x+2)(x+1) + C_2(x-1)^2(x+2) = 6x^4 - 9x^2 + 5$$

$$\text{Si } x=1 \quad 12A_2 = 2 \quad A_2 = 1/6$$

$$\text{Si } x=-1 \quad 4C_2 = 2 \quad C_2 = 1/2$$

$$\text{Si } x=-2 \quad 9B = 65 \quad B = 65/9$$

$$\text{Si } x=0 \quad -2A_1 + 2A_2 + B + 2C_1 + 2C_2 = 5 \quad \text{y resulta} \quad C_1 - A_1 = -16/9$$

$$\text{Si } x=2 \quad 36A_1 + 36A_2 + 9B + 12C_1 + 4C_2 = 65 \quad \text{y resulta} \quad 3C_1 + 9A_1 = -2$$

Resolvemos el sistema de las dos ecuaciones anteriores y se obtiene $A_1 = 5/18$, $C_1 = -3/2$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{5}{18} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{65}{9} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{5}{18} \log|x-1| - \frac{1}{6} \frac{1}{x-1} + \frac{65}{9} \log|x+2| - \frac{3}{2} \log|x+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Integración de algunas funciones irracionales.

*

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad \text{siendo } R \text{ una función racional}$$

$$\text{cambio de variable: } x = a \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad x = \sqrt{2} \operatorname{sen}(t) \quad ; \quad dx = \sqrt{2} \cos(t) dt$$

$$I = \int \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2(t)}} \sqrt{2} \cos(t) dt = 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}^3(t) dt = 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}(t)(1-\cos^2(t)) dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}(t) dt - 2\sqrt{2} \int \cos^2(t) \operatorname{sen}(t) dt = -2\sqrt{2} \cos(t) + 2\sqrt{2} \frac{\cos^3(t)}{3} =$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{(2-x^2)^{3/2}}{6\sqrt{2}} - \frac{(2-x^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} \right) + C$$

$$\text{ya que } \cos(t) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$$

Nota.

Para resolver el ejercicio anterior hemos tenido que calcular la integral de la función $\operatorname{sen}^3(t)$. En otras situaciones tendremos que obtener las integrales de $\operatorname{sen}^2(t)$ ó $\cos^2(t)$. Para ello, nos servimos de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \quad ; \quad \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

*

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \quad \text{siendo } R \text{ una función racional}$$

cambio de variable $x = a \operatorname{tg}(t)$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad x = \operatorname{tg}(t) \quad , \quad dx = \sec^2(t) dt$$

$$I = \int \frac{\sec^2(t)}{\operatorname{tg}^2(t) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(t)}} dt = \int \frac{\sec(t)}{\operatorname{tg}^2(t)} dt = \int \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}^2(t)} dt = -\frac{1}{\operatorname{sen}(t)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(x))} + C$$

2.2: La integral definida. Funciones integrables.

Sea f una función acotada en $[a, b]$. No definiremos cuando f es integrable (Riemann integrable), pero al menos seamos conscientes de que hay funciones que no son integrables; por ejemplo:

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \in Q \quad , \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x \notin Q$$

no es integrable en ningún intervalo cerrado $[a, b]$.

Veremos de muchas clases de funciones que sí lo son; de momento diremos que en el caso de que f sea integrable existe lo que se llama la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ y se denota por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Los números a y b se llaman límites de integración y deberían ser tales que $a < b$. Si sucede lo contrario se conviene en que:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Si $f(x) \geq 0$ y $a < b$, la integral de f en el intervalo $[a, b]$ mide el área de la región delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$, el eje de abscisas y la gráfica de la función f .

Condiciones suficientes de integrabilidad.

- Toda función f continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.
- Toda función f acotada en $[a, b]$ que tenga un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, es integrable en dicho intervalo.

*Propiedades de las funciones integrables.**1) Linealidad*

Si f y g son integrables en $[a, b]$ también lo es la función $f + g$ y se verifica:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Si f es integrable en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot f$ es integrable en $[a, b]$ y se verifica:

$$\int_a^b (k \cdot f)(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

2) Monotonía.

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$

3) Aditividad respecto al intervalo.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in (a, b)$. Se verifica que f es integrable en $[a, b] \Leftrightarrow f$ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Además

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4) Si f es integrable en $[a, b]$ se verifica que $|f|$ también es integrable en $[a, b]$. Además:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Sea f una función integrable en $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a, b]$ de la manera siguiente:

$$\forall x \in [a, b] \quad , \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Esta función está bien definida puesto que por ser f integrable en $[a, b]$ también lo es en $[a, x]$ $\forall x \in [a, b]$. La función F así definida se denomina la *función integral* de la función f . Se verifica que F es continua en $[a, b]$.

Primer teorema fundamental

Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de f en $[a, b]$, es decir, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Ejercicio.

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \text{b) } F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \text{c) } F(x) = \int_0^{x^3} \sin^2(t) dt, \quad \text{d) } F(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^3) dt$$

Ejercicio.

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{tg}(t) dt}{\sin(x)}$$

Segundo teorema fundamental del cálculo integral (Regla de Barrow).

Si f es continua en $[a, b]$ y G es una función continua en $[a, b]$ y primitiva de f en (a, b) entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Ejemplos:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ojo!!!!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2 \quad (\text{no tiene sentido}) \quad \text{¿Dónde está el fallo?}$$

Existen funciones continuas cuyas primitivas no se pueden expresar mediante funciones elementales. Así, por ejemplo, $f(x) = e^{x^2}$. En estos casos no se puede aplicar la regla de Barrow y se hace necesaria la utilización de métodos numéricos.

Cambio de variable en la integral definida.

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$; si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$, siendo g una función derivable con derivada continua que admite función inversa y tal que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Ejemplo:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad x = \text{sen}(t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\text{sen}^2(t)} \cdot \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\text{sen}(\pi) - 0 - \frac{1}{4}\text{sen}(0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio.

Demostrar que si f es una función integrable en $[-a, a]$, $a > 0$, entonces:

a) Si f es par $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

b) Si f es impar $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Ejemplo:

$$\int_{-2}^2 \frac{x^5 \cos(x)}{x^4 + 5} dx = 0 \quad \text{ya que} \quad f(x) = \frac{x^5 \cos(x)}{x^4 + 5} \quad \text{es una función impar} \quad (f(-x) = -f(x))$$

Integración por partes en la integral definida.

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables con derivada continua

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ es decir, } f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$ entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$; la fórmula se puede escribir así: $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Ejercicio:

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \text{sen}(2x)dx = -\frac{1}{2}x \cdot \cos(2x) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\text{sen}(\pi) - \text{sen}(0)) = \frac{\pi}{4}$$

$$u = x \quad du = dx \quad dv = \text{sen}(2x)dx \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

2.3: Integrales impropias

Integrales en intervalos no acotados

Las integrales en intervalos no acotados o integrales impropias de primera especie son integrales del tipo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si la función f es acotada e integrable $\forall x \geq a$, se define:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que la integral es divergente.

Si la función f es acotada e integrable $\forall x \leq b$, se define:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que la integral es divergente.

Si la función f es acotada e integrable en el intervalo $[a, b]$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se define:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad \text{siendo } c \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

Si los dos límites anteriores son finitos entonces la integral es convergente.

Ejercicio.

Demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

Integrales de funciones no acotadas (impropias de segunda especie).

Si f no es acotada en $x = a$ y es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a + \varepsilon, b]$ siendo ε cualquier número real positivo tal que $a + \varepsilon < b$, se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que la integral es divergente.

Si f no es acotada en $x = b$ y es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a, b - \varepsilon]$ siendo ε cualquier número real positivo tal que $b - \varepsilon > a$, se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que la integral es divergente.

Si f no es acotada en el punto $c \in (a, b)$ y es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a, c - \varepsilon_1]$ y $[c + \varepsilon_2, b]$ siendo ε_1 y ε_2 cualesquiera números reales positivos tales $c - \varepsilon_1 > a$ $c + \varepsilon_2 < b$, se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

Si los dos límites anteriores son finitos entonces la integral es convergente.

Ejercicio.

Demostrar que la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ es convergente si $\alpha < 1$ y divergente si $\alpha \geq 1$.

Integrales eulerianas.

$$* \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0 \quad \text{función } \Gamma \text{ (Gamma) de Euler}$$

Propiedades.

$$a) \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$b) \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi.p)} \quad \forall p \in (0,1)$$

$$c) \Gamma(p+1) = p.\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

Si $p > 1$, el cálculo de $\Gamma(p)$ se reduce al cálculo de $\Gamma(q)$ con $q \in (0,1)$. Para estos valores, entre 0 y 1, existen tablas de valores de la función.

Ejercicio.

$$\text{Comprobar que } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (\log x)^{1/2}} = \Gamma(1/2)$$

$$* \quad \beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0 \quad \text{función } \beta \text{ (Beta) de Euler}$$

Propiedades.

$$a) \beta(p, q) = \beta(q, p) \quad \forall p, q > 0$$

$$b) \beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(x) \cdot \cos^{2q-1}(x) dx \quad \forall p, q > 0$$

$$c) \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \forall p, q > 0$$

Ejercicio.

$$\text{Calcular } \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Aplicaciones geométricas de la integral.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones acotadas e integrables en el intervalo acotado $[a, b]$.

Cálculo de áreas de regiones planas.

En el cálculo de áreas hemos de tener presente el signo de la función integrando en el intervalo de integración.

* Si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, el área de la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas, viene dado por:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

* Sean $c, d \in (a, b)$ tales que $c < d$. Si, por ejemplo, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c] \cup [d, b]$ y $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [c, d]$, entonces el área de la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas, viene dado por:

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d -f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

es decir, que el área de una región de este tipo es:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

* Si $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces el área de la región plana delimitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

* Sean $c, d \in (a, b)$ tales que $c < d$. Si, por ejemplo, $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, c] \cup [d, b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [c, d]$, entonces el área de la región plana delimitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, viene dado por:

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) - f(x)]dx + \int_d^b [f(x) - g(x)]dx$$

es decir, que el área de una región de este tipo es:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

- Si el intervalo no es acotado o la función integrando no es acotada en algún punto de $[a, b]$ se pueden enunciar resultados análogos a los anteriores siempre que las integrales impropias correspondientes sean convergentes.

Ejercicio.

Calcular el área encerrada por la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \quad ; \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 2ab \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab \end{aligned}$$

Se ha hecho el cambio de variable $x = a \sin(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

Ejercicio.

Hallar el área determinada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota horizontal.

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctg(b) - \arctg(0)] = \pi$$

Ejercicio.

Calcular el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

Longitud de un arco de curva.

Si se considera la curva $y = f(x)$, donde f es una función de clase uno en $[a, b]$, se verifica que la longitud del arco de curva de extremos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ viene dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ejercicio.

Calcular la longitud de la circunferencia de radio r

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ; \quad y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad ; \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 4r \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2(t)}} \cdot r \cdot \cos(t) dt = 4r \int_0^{\pi/2} dt = 4r \frac{\pi}{2} = 2\pi \cdot r \end{aligned}$$

Ejercicio:

Calcular la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ de extremos los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

Consideremos la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ $x = b$ y el eje de abscisas. Si se hace girar esta región alrededor del eje de abscisas se genera un cuerpo denominado cuerpo de revolución (sólido de revolución) cuyo volumen viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ejercicio.

Calcular el volumen de un cilindro de radio r y altura h sabiendo que es un sólido de revolución.

