

TEMA 2

INTEGRAL DE RIEMANN

Indice

- Objetivos.
- Cálculo de primitivas.
- La integral definida. Funciones integrables.
- Integrales impropias.
- Aplicaciones geométricas de la integral.

Objetivos

- Plantear y calcular integrales de funciones de una variable y aplicarlas a la resolución de problemas relativos a la ingeniería.

Cálculo de Primitivas

Se dice que una función $F(x)$ es una función primitiva de la función $f(x)$ $\Leftrightarrow$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

La función $f(x)$ recibe el nombre de integrando y sumando a $F(x)$ una constante arbitraria C , se obtiene otra función primitiva.

Al conjunto de primitivas de la función f se le llama la integral indefinida de f .

Se escribe de la siguiente forma:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Las siguientes propiedades son inmediatas:

- $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$
- $\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Cálculo de Primitivas

Integrales Inmediatas (I)

$$\int a \cdot dx = ax + C \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$$

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int \sec^2(x) dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(x)) dx = \operatorname{tg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x) dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C$$

Cálculo de Primitivas

Integrales Inmediatas (II)

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(f(x))} \cdot f'(x) dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x) dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x) dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\int \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = -\log(\cos(x)) + C$$

$$\int \operatorname{ctg}(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx = \log(\operatorname{sen}(x)) + C$$

Cálculo de Primitivas

Métodos generales de integración: Cambio de variable

Sea f una función que admite primitiva, si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ siendo g una función derivable con derivada continua, resulta:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) \cdot dt$$

Ejemplo:

$$\int x\sqrt{x^2+1} \cdot dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$$

Se ha hecho el cambio $x^2+1=t^2$ $t > 0$, es decir, $2x dx = 2t dt$ $x dx = t dt$

Cálculo de Primitivas

Métodos generales de integración: Integración por Partes

Si f y g son dos funciones derivables en el punto x , sabemos que $f \cdot g$ es derivable

$$\text{en } x: f(x)g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x)g(x)$$

$$\begin{aligned}\text{Por tanto: } \int f(x)g'(x)dx &= \int (f \cdot g)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx = \\ &= (f \cdot g)(x) - \int f'(x)g(x)dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

Si llamamos $u = f(x)$ $v = g(x)$ entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$
la fórmula se puede escribir así:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Cálculo de Primitivas

Ejemplos:

*

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx = I \quad ; \quad u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx, \quad dv = \operatorname{sen}(x) dx, \quad v = -\cos(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \int e^{2x} \cos(x) dx \quad ; \quad u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx, \quad dv = \cos(x) dx, \quad v = \operatorname{sen}(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \left[e^{2x} \operatorname{sen}(x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx \right] = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \operatorname{sen}(x) - 4I$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C$$

*

$$\int \log(x) dx = I \quad ; \quad u = \log(x), \quad du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad dv = dx, \quad v = x$$

$$I = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x = x(\log(x) - 1) + C$$

Cálculo de Primitivas

Integración de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{siendo } P \text{ y } Q \text{ polinomios}$$

Es suficiente estudiar el caso en que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ debido a que en caso contrario, se realiza la división y existen polinomios $C(x)$ y $R(x)$, cociente y resto respectivamente tales que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Con grado de $R(x) < \text{grado de } Q(x)$ y por tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Cálculo de Primitivas

Integración de funciones racionales:

Supongamos que el grado de $P(x)$ es inferior al grado de $Q(x)$. Para hallar la integral se calculan las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$ y se descompone la fracción original en suma de fracciones simples. Veremos dos casos:

Raíces reales simples (a,b,c...):
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

Raíz real a de multiplicidad m:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots$$

Cálculo de Primitivas

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad ; \quad \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad , \quad Ax - A + Bx + B = 1$$

$$\text{Si } x=1 \quad 2B=1 \quad B=1/2$$

$$\text{Si } x=-1 \quad -2A=1 \quad A=-1/2$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

Cálculo de Primitivas

Integración de algunas funciones irracionales:

Existen dos tipos distintos:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \quad \text{siendo } R \text{ una función racional}$$

Se solucionan con el cambio de variable: $x = a \cdot \sin(t)$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx \quad \text{siendo } R \text{ una función racional}$$

Se solucionan con el cambio de variable: $x = a \cdot \tan(t)$

Cálculo de Primitivas

Integración de algunas funciones irracionales:

Al resolver ciertos ejercicios de este apartado, es necesario calcular la integral del seno cuadrado o coseno cuadrado. Para ello, nos servimos de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

La Integral Definida

Sea f una función acotada en $[a,b]$ e integrable, entonces la integral definida de f en $[a,b]$ se denota:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Los números a y b se llaman límites de integración y deberían ser tales que a es menor que b

Si $f(x) \geq 0$ y $a < b$, la integral de f en el intervalo $[a,b]$ mide el área de la región delimitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, el eje de abscisas y la gráfica de la función f

La Integral Definida

Propiedades de las funciones integrables

Linealidad:

Si f y g son integrables en $[a,b]$ también lo es la función $f+g$ y se verifica:

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Si f es integrable en $[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces la función $k \cdot f$ también lo es:

$$\int_a^b (k \cdot f)(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

La Integral Definida

Propiedades de las funciones integrables

Monotonía:

Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Aditividad:

Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in (a,b)$. Se verifica que f es integrable en $[a,b]$ si y solo si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

La Integral Definida

Teoremas Fundamentales del Calculo Integral

Sea f una función integrable en $[a,b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a,b]$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in [a,b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Esta función está bien definida puesto que por ser f integrable en $[a,b]$ también lo es en $[a,x] \forall x \in [a,b]$. La función F así definida se denomina función integral de la función f . Se verifica que F es continua en $[a,b]$

La Integral Definida

Teoremas Fundamentales del Calculo Integral

Primer Teorema Fundamental

Si la función $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, la función $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f en $[a,b]$, es decir:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

La Integral Definida

Teoremas Fundamentales del Calculo Integral

Segundo Teorema Fundamental (Regla de Barrow)

Si f es una función continua en $[a,b]$ y G es una función continua en $[a,b]$ y primitiva de f en (a,b) entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Ejemplo

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(x)dx = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

La Integral Definida

Cambio de variable en la integral definida

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$; si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ siendo g una función derivable con derivada continua que admite función inversa y tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Ejemplo:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad x = \text{sen}(t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\text{sen}^2(t)} \cdot \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\text{sen}(\pi) - 0 - \frac{1}{4}\text{sen}(0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La Integral Definida

Integración por partes en la integral definida

Sean $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables con derivada continua

$$f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x) \cdot g(x)$$

Por tanto:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$ entonces $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$; podemos escribir la fórmula de la siguiente forma:

$$\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Integrales Impropias

Integrales en intervalos no acotados

Las integrales en intervalos no acotados o integrales impropias de primera especie son integrales del tipo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si la función f es acotada e integrable $\forall x \geq a$ se define:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que es divergente

Integrales Impropias

Integrales en intervalos no acotadas

Si la función f es acotada e integrable $\forall x \leq b$ se define:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que es divergente

Si la función f es acotada e integrable en el intervalo $[a,b] \forall a,b \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad \text{Siendo } c \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

Si los dos límites anteriores son finitos entonces la integral es convergente

Integrales Impropias

Integrales de funciones no acotadas

Si f no es acotada en $x = a$ y es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a + \varepsilon, b]$ siendo ε cualquier número real positivo tal que $a + \varepsilon < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Si f no es acotada en $x = b$ y es acotada e integrable en todo el intervalo de la forma $[a, b - \varepsilon]$ siendo ε cualquier número real positivo tal que $b - \varepsilon > a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Si este límite existe y es finito, diremos que la integral del primer miembro es convergente. Si el límite es infinito se dice que la integral es divergente

Integrales Impropias

Integrales de funciones no acotadas

Si f no es acotada en el punto $c \in (a,b)$ y es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a, c - \varepsilon_1]$ y $[c + \varepsilon_2, b]$ siendo ε_1 y ε_2 cualesquiera números reales positivos tales que $c - \varepsilon_1 > a$, $c + \varepsilon_2 < b$ se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

Si los dos límites anteriores son finitos, entonces la integral es convergente

Integrales Impropias

Integrales Eulerianas

Función Gamma de Euler

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx \quad p > 0$$

Propiedades

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi \cdot p)} \quad \forall p \in (0,1)$$

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

Si $p > 1$ el cálculo de $\Gamma(p)$ se reduce al cálculo de $\Gamma(q)$ con $q \in (0,1)$

Para estos valores entre 0 y 1, existen tablas de valores de la función

Integrales Impropias

Integrales Eulerianas

Función Beta de Euler

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx \quad p, q > 0$$

Propiedades

$$\beta(p, q) = \beta(q, p) \quad \forall p, q > 0$$

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(x) \cdot \cos^{2q-1}(x) dx \quad \forall p, q > 0$$

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \forall p, q > 0$$

Aplicaciones geométricas

Cálculo de áreas de regiones planas

En el calculo de áreas hemos de tener presente el signo de la función integrando en el intervalo de integración

Si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ el área de la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Sean $c, d \in (a, b)$ tales que $c < d$. Si, por ejemplo $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c] \cup [d, b]$ y $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [c, d]$, entonces el área de la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas:

$$A = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d -f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Aplicaciones geométricas

Cálculo de áreas de regiones planas

Si $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces el área de la región plana delimitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Sean $c, d \in (a, b)$ tales que $c < d$. Por ejemplo, $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, c] \cup [d, b]$
y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [c, d]$ entonces el área de la región plana delimitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$:

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^d [g(x) - f(x)] dx + \int_d^b [f(x) - g(x)] dx$$

Aplicaciones geométricas

Longitud de un arco de curva

Si se considera la curva $y = f(x)$ donde f es una función de clase uno en $[a,b]$ se verifica que la longitud del arco de curva de extremos los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ viene dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Aplicaciones geométricas

Volúmenes de cuerpos de revolución

Consideremos la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$ las rectas $x = a$ $x = b$ y el eje de abscisas.

- Si se hace girar esta región alrededor del eje de abscisas se genera un cuerpo denominado cuerpo de revolución cuyo volumen viene dado:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$