

CALCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 1

1) Demostrar, aplicando el principio de inducción, las relaciones siguientes:

$$\text{a) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{b) } 2^n \leq n! \quad \forall n \geq 4$$

Solución:

a)

Para $n = 1$ obtenemos $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que es cierta la igualdad para n y debemos demostrarla para $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

b)

Para $n = 4$ obtenemos $2^4 = 16 \leq 4! = 24$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que es cierta la desigualdad para n y debemos demostrarla para $n + 1$:

$$2^{n+1} \leq (n+1)!$$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

2) Hallar los números reales x que verifican:

a) $(x-3)^2 \geq 2$

b) $(x+2)^2 < 3$

c) $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-4)} > 0$

d) $|3x-1| > |2x-4|$

e) $\left| \frac{x+1}{x^2+1} \right| \leq 1$

Solución:

a) $(x-3)^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x-3| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow x-3 \geq \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x-3 \leq -\sqrt{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \geq 3+\sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x \leq 3-\sqrt{2} \quad , \text{ es decir, son los}$

$$x \in (-\infty, 3-\sqrt{2}] \cup [3+\sqrt{2}, +\infty)$$

$$\text{b) } (x+2)^2 < 3 \Leftrightarrow |x+2| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x+2 < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-2 < x < \sqrt{3}-2$$

, es decir, son los $x \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$

$$\text{c) } \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-4)} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \quad \text{y} \quad (x+3)(x-4) > 0 \quad \text{ó}$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \text{y} \quad (x+3)(x-4) < 0$$

$$(x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > -1 \quad \text{y} \quad x > 2 \quad \text{ó} \quad x < -1 \quad \text{y} \quad x < 2 \Leftrightarrow x > 2 \quad \text{ó} \quad x < -1$$

$$(x+3)(x-4) > 0 \Leftrightarrow x > -3 \quad \text{y} \quad x > 4 \quad \text{ó} \quad x < -3 \quad \text{y} \quad x < 4 \Leftrightarrow x > 4 \quad \text{ó} \quad x < -3$$

$$\text{El numerador y el denominador son por tanto positivos} \Leftrightarrow x > 4 \quad \text{ó} \quad x < -3$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \quad ; \quad (x+3)(x-4) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 4$$

$$\text{El numerador y el denominador son por tanto negativos} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

$$\text{Solución: son los } x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (4, +\infty)$$

$$\text{d) } |3x-1| = 3x-1 \quad \text{si} \quad x \geq 1/3 \quad \text{ó} \quad 1-3x \quad \text{si} \quad x \leq 1/3$$

$$|2x-4| = 2x-4 \quad \text{si} \quad x \geq 2 \quad \text{ó} \quad 4-2x \quad \text{si} \quad x \leq 2$$

$$\text{Si } x \leq 1/3, \quad |3x-1| > |2x-4| \Leftrightarrow 1-3x > 4-2x \Leftrightarrow 3+x < 0 \Leftrightarrow x < -3$$

$$\text{Si } 1/3 \leq x \leq 2, \quad |3x-1| > |2x-4| \Leftrightarrow 3x-1 > 4-2x \Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

$$\text{Si } x \geq 2, \quad |3x-1| > |2x-4| \Leftrightarrow 3x-1 > 2x-4 \Leftrightarrow x > -3 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Solución: son los } x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{e) } \left| \frac{x+1}{x^2+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2-1 \leq x+1 \leq x^2+1$$

$$-x^2-1 \leq x+1 \Leftrightarrow x^2+x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \quad (\text{se verifica } \forall x)$$

$$x+1 \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{ó} \quad x \leq 0$$

$$\text{Solución: son los } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

3) Hallar el dominio de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x-5}{x^3-x^2-2x} & \text{b) } g(x) = \sqrt{x^2+2x-3} & \text{c) } h(x) = \operatorname{sen} \frac{x+9}{x^2+1} \\ \text{d) } m(x) = \log \left(\sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}} - 1 \right) \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-5}{x(x^2-x-2)} = \frac{x-5}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{b) } \operatorname{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+3) \geq 0\}$$

$$(x-1)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ y } x \geq -3 \text{ ó } x \leq 1 \text{ y } x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ó } x \leq -3$$

$$\operatorname{Dom} g = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{c) } \operatorname{Dom} h = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{Dom} m &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}} > 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^2+x+3}{x^2+1} > 1 \right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2+x+3 > x^2+1\} = \{x \in \mathbb{R} / x+2 > 0\} = (-2, +\infty) \end{aligned}$$

4) Estudiar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^6 - 3x^2 + 5}{x^3 - 2x + 1} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) - 1 + x^4}$$

$$\text{c) } h(x) = x^6 \operatorname{tg}(x) - x^3 \cos(x) \quad \text{d) } m(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{x^3 - x}$$

Solución:

$$\text{a) } f(-x) = \frac{2x^6 - 3x^2 + 5}{-x^3 + 2x + 1} \neq f(x) \text{ y } \neq -f(x) \quad \text{ninguna de las dos cosas}$$

$$\text{b) } g(-x) = \frac{-x^5 + 2x^3 - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) - 1 + x^4} = -g(x) \quad \text{impar}$$

$$\text{c) } h(-x) = -x^6 \operatorname{tg}(x) + x^3 \cos(x) = -h(x) \quad \text{impar}$$

$$d) \quad m(-x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{-x^3+x} = m(x) \quad \text{par}$$

5) Se consideran las funciones

$$f(x) = x^2 - x \quad g(x) = e^{-x} \quad h(x) = \log(-x)$$

- Hallar $f \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ g \circ h$, $f \circ g$ y sus dominios
- ¿Es f inyectiva en R ? En caso negativo, restringir f , a partir de su gráfica, a un dominio donde sí lo sea y hallar la función inversa f^{-1} calculando su dominio.
- ¿alguna de las funciones f, g y h es acotada en su dominio? Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, mínimo y máximo de cada una de estas funciones en el intervalo $(0, 1]$.

Solución:

$$a) \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x \quad \forall x \in R$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\log(-x)) = e^{-\log(-x)} = -\frac{1}{x} \quad \forall x < 0$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(e^{-x}) = \log(-e^{-x}) \quad \text{no existe}$$

$$(f \circ g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x}\right)^2 - \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \forall x < 0$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{-x}) = (e^{-x})^2 - e^{-x} = e^{-2x} - e^{-x} \quad \forall x \in R$$

- $f(x) = x(x-1)$; $f(0) = 0 = f(1)$ por tanto f no es inyectiva en R

A partir de la gráfica se observa que f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0.5]$ y estrictamente creciente en $[0.5, +\infty)$. Así pues, f es inyectiva en cada uno de estos intervalos.

$$\text{Consideremos } f : [0.5, +\infty) \rightarrow [-0.25, +\infty)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in [-0.25, +\infty) \quad ; \quad [f^{-1}(x)]^2 - f^{-1}(x) = x \quad ;$$

$$t^2 - t - x = 0 \quad \text{siendo } t = f^{-1}(x) \quad ; \quad t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4x}}{2}$$

La inversa es única; en este caso

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \quad ; \quad \text{Dom } f^{-1} = [-0.25, +\infty) \quad ; \quad \text{Im } f^{-1} = [0.5, +\infty)$$

- f no es acotada en R ya que no es acotada superiormente al ser $\text{Im } f = [-0.25, +\infty)$.
 g no es acotada en R ya que no es acotada superiormente al ser $\text{Im } g = (0, +\infty)$.
 h no es acotada superiormente ni inferiormente en $(-\infty, 0)$ ya que $\text{Im } h = (-\infty, +\infty)$.

$$\text{Si } x \in (0,1] , \quad f(x) \in [-0.25,0] = \text{Im } f$$

$$\sup_{x \in (0,1]} f(x) = 0 = \max_{x \in (0,1]} f(x) \quad ; \quad \inf_{x \in (0,1]} f(x) = -0.25 = \min_{x \in (0,1]} f(x)$$

$$\text{Si } x \in (0,1], \quad g(x) \in [e^{-1},1] = \text{Im } g$$

$$\sup_{x \in (0,1]} g(x) = 1 , \quad \max_{x \in (0,1]} g(x) \text{ no existe} \quad ; \quad \inf_{x \in (0,1]} g(x) = e^{-1} = \min_{x \in (0,1]} g(x)$$

h no está definida en $(0,1]$; por tanto no tiene sentido calcular el supremo, ínfimo, ... ya que el conjunto imagen es el vacío.

6) Calcular, empleando cuando se pueda infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x-a)}{x^2 - a^2} \text{ si } x \rightarrow a , \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^3) \log\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) \text{ si } x \rightarrow \infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}(x) - \cos(x)}{1 - \text{tg}(x)} \text{ si } x \rightarrow \frac{\pi}{4} , \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}(x)}} \text{ si } x \rightarrow 0$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{2 + e^{-1/x}} \text{ si } x \rightarrow 0$$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x-a)}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^3) \log\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^3) \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\text{sen}(x) - \cos(x)}{1 - \text{tg}(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\text{sen}(x) - \cos(x)}{1 - \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} -\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/\text{sen}(x)} = l \quad ; \quad \log l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{sen}(x)} \log(\cos(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x} = 0$$

$$l = e^0 = 1$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8}{2 + e^{-1/x}} = \frac{8}{2+0} = 4 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8}{2 + e^{-1/x}} = \frac{8}{2+\infty} = 0 \quad ; \quad \text{no existe el límite en el cero.}$$

7) Obtener las asíntotas de las siguientes funciones

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & \text{b) } g(x) = \log(x^2 + 3x + 2) & \text{c) } h(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} \\ & \text{d) } l(x) = x.e^{1/x} \end{array}$$

utilizando, cuando corresponda, infinitésimos equivalentes y jerarquía de infinitos.

Solución:

$$\text{a) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Verticales: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1 \quad \text{No hay}$$

$$\text{Horizontales: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{horizontal a los dos lados}$$

Oblicuas: No tiene (por tener una asíntota horizontal a los dos lados).

$$\text{b) } \text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 2 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

Verticales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) &= \log\left(\lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 3x + 2\right) = \log(0) = -\infty \\ & \quad x = -2 \quad \text{asíntota vertical por la izquierda.} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \log\left(\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 3x + 2\right) = \log(0) = -\infty \\ & \quad x = -1 \quad \text{asíntota vertical por la derecha.} \end{aligned}$$

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \log\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 2\right) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \text{No tiene asíntotas horizontales}$$

Oblicuas: $y = ax + b$, $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 3x + 2)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} \quad \text{ya que si } x \rightarrow +\infty \\ & \quad \log(x) \ll x \\ & \quad \text{No tiene asíntotas oblicuas} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{2\}$$

Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \quad ; \quad x = 2 \quad \text{asíntota vertical por la izquierda y por la dcha.}$$

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty; \quad \text{No tiene asíntotas horizontales}$$

Oblicuas: $y = ax + b$, $a \neq 0$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} - x \right]$$

$y = x + 4$ asíntota oblicua por los dos lados

d) $\text{Dom } l = \mathbb{R} - \{0\}$

Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} l(x) = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = 0.e^{+\infty} = 0.\infty \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \text{ya que si } t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad e^t \gg t$$

$x = 0$ asíntota vertical por la derecha

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x.e^{1/x} = +\infty.1 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x.e^{1/x} = -\infty.1 = -\infty; \quad \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

Oblicuas: $y = ax + b$, $a \neq 0$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{l(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [l(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [l(x) - x]$$

$$\text{ya que } e^x - 1 \approx x \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

$y = x + 1$ asíntota oblicua por los dos lados.

- 8) Justificar que las siguientes funciones son continuas en su dominio y definir las, cuando sea posible, en el resto de puntos para que sean continuas en toda la recta real.

$$\text{a) } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4} \quad \text{c) } h(x) = \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}}$$

$$\text{d) } l(x) = \frac{x}{x^2 + 3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e) } m(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x(x-1)}$$

Solución:

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$; f es continua en su dominio por ser diferencia y cociente de continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1 \quad (e^x - 1 \approx x \text{ si } x \rightarrow 0)$$

Si definimos $f(0) = 1$ f es continua en $\mathbb{R}$

b) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} - \{-4\}$

g es continua en su dominio por ser racional (cociente de funciones polinómicas).

$$\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} x - 4 = -8$$

Si definimos $g(-4) = -8$ g es continua en $\mathbb{R}$

c) $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R} - \{0\}$

h es continua en su dominio por ser suma, resta, cociente y composición de continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \frac{1 + e^{-\infty}}{1 - e^{-\infty}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^{1/x}} + 1}{\frac{1}{e^{1/x}} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

h presenta una discontinuidad esencial de salto finito en el punto 0 ; por tanto no es posible definir h en dicho punto para que sea continua en $\mathbb{R}$.

d) $\operatorname{Dom} l = \mathbb{R} - \{0\}$

l es continua en su dominio por ser suma, producto, cociente y composición de continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{por ser producto de una función con límite } 0 \text{ por otra acotada.}$$

Si definimos $l(0) = 0$ l es continua en $\mathbb{R}$.

e) $\operatorname{Dom} m = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

m es continua en su dominio por ser diferencia, producto y cociente de funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(x-1)} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x)}{x(x-1)} = \frac{1 - \cos(1)}{0} = \infty$$

m presenta una discontinuidad esencial en el punto 1; por tanto no es posible definir m en dicho punto para que sea continua en R . Si definimos $m(0) = 0$ sería continua en $R - \{1\}$.

- 9) Demostrar que la ecuación $\cos(x) = kx$, $k > 0$, tiene, al menos, una solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Solución:

Tenemos que demostrar que la ecuación $kx - \cos(x) = 0$ ($k > 0$) tiene, al menos, una raíz en el intervalo $(0, \pi/2)$. Sea $f(x) = kx - \cos(x)$ ($k > 0$)

f es continua $\forall x \in R$; en particular lo es en $[0, \pi/2]$; $f(0) = -1 < 0$; $f(\pi/2) = k \frac{\pi}{2} > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano se demuestra el resultado.

- 10) Decir, de las siguientes funciones, cuáles están acotadas superiormente e inferiormente, y las que tienen máximo y mínimo (sin utilizar derivadas).

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $[0, 2]$, b) $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en $[2, 3]$

c) $h(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ en todo R

Solución:

- a) f no está acotada superiormente ni inferiormente en $[0, 2]$ ya que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$. En consecuencia no existe $\max_{x \in [0, 2]} f(x)$ y no existe $\min_{x \in [0, 2]} f(x)$.

- b) g es continua en el intervalo cerrado $[2, 3]$; por tanto es acotada superiormente e inferiormente en $[2, 3]$ y alcanza el máximo y el mínimo en dicho intervalo.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^4}$

h está acotada superiormente e inferiormente en R ya que es continua en todo punto y el límite en el infinito es un número real. Además como la función no toma valores negativos, $h(0) = 0$ y el límite en el infinito es cero resulta que el conjunto imagen es un intervalo de la forma $[0, h(a)] = [0, h(-a)]$. Por tanto tiene máximo $(h(a))$ y mínimo (0) .

11) Estudiar la continuidad y derivabilidad en los puntos $x = 0$ y $x = -1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & , \quad x \geq 0 \\ x^2 & , \quad x \in (-1, 0) \\ -2x - 1 & , \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Hallar la función derivada de f en los puntos donde exista.

Solución:

$$f \text{ es continua en } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) = 0 \quad ; \quad f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$f \text{ es continua en } x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -2x - 1 = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \quad ; \quad f(-1) = 1$$

f es continua en $x = 0$ y en $x = -1$; por tanto es continua en todos los reales.

$$f \text{ es derivable en } x = 0 \Leftrightarrow \exists f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0 \quad ; \quad f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$$

f no es derivable en $x = 0$

$$f \text{ es derivable en } x = -1 \Leftrightarrow \exists f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(-1+h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2$$

$$f'(-1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

f es derivable en $x = -1$ y $f'(-1) = -2$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & x > 0 \\ 2x & , \quad x \in (-1, 0) \\ -2 & , \quad x \leq -1 \end{cases}$$

12) Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{|x|}$

b) $g(x) = \log\left(\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x)+1}\right)$

$$\text{c) } j(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{d) } l(x) = (3 + 2x)^{\log(3+2x)}$$

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

f es derivable en $x = 0 \Leftrightarrow \exists f'(0^-) \in \mathbb{R}, \exists f'(0^+) \in \mathbb{R} \text{ y } f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto no existe $f'(0)$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \log(\operatorname{tg}^2(x)) - \log(\operatorname{tg}(x) + 1) \quad ; \quad g'(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{\operatorname{tg}^2(x)} - \frac{1 + \operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x) + 1}$$

$$g'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2(x)) \left(\frac{2}{\operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x) + 1} \right)$$

c)

$$j'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{j(h) - j(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$$

$$j'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{j(h) - j(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto no existe $j'(0)$

$$j'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \log l(x) = \log(3 + 2x) \cdot \log(3 + 2x) = (\log(3 + 2x))^2$$

$$\frac{l'(x)}{l(x)} = 2\log(3 + 2x) \cdot \frac{2}{3 + 2x} \quad ; \quad l'(x) = (3 + 2x)^{\log(3+2x)} \cdot \log(3 + 2x) \cdot \frac{4}{3 + 2x}$$

13) Sea $f(x) = \arctg\left(\frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}\right)$

- a) Comprobar que la función derivada es una constante.
 b) Hallar la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{\cos^2(x)}{(1 + \operatorname{sen}(x))^2}} \cdot \frac{-\operatorname{sen}(x)(1 + \operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cos(x)}{(1 + \operatorname{sen}(x))^2} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{(1 + \operatorname{sen}(x))^2 + \cos^2(x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x) - 1}{2\operatorname{sen}(x) + 2} = -\frac{\operatorname{sen}(x) + 1}{2(\operatorname{sen}(x) + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad ; \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x$

14) Hallar la derivada de la función inversa de $f(x) = x^2 - x$ si $x \in [1, 2]$.

Comprobar que se obtiene lo mismo utilizando el resultado correspondiente a la derivada de la función inversa.

Solución:

Si $x \in [1, 2]$ $f(x) = x(x - 1)$ es estrictamente creciente (por tanto *inyectiva*) y $f : [1, 2] \rightarrow [0, 2]$. La inversa es (ver ejercicio 5b):

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4x}}{2}, \quad x \in [0, 2]$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2} \frac{4}{2\sqrt{1 + 4x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x}} \quad \forall x \in (0, 2)$$

Utilizando el resultado correspondiente a la derivada de la función inversa, resulta:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x) - 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x}}$$

15) Demostrar que la ecuación $\frac{x-1}{x} - e^{-x} = 0$ tiene exactamente una raíz positiva y encontrar un intervalo (con extremos enteros consecutivos) que la contenga.

Solución:

Sea $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$ con $x \in (0, \infty)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$

Así pues, la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz positiva como consecuencia del teorema de Rolle.

f es continua en $[1, 2]$, $f(1) = -e^{-1} < 0$, $f(2) = 0.5 - e^{-2} > 0$. Por tanto, aplicando Bolzano, podemos afirmar que en el intervalo $(1, 2)$ la ecuación $f(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz real.

De todo lo anterior se deduce que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una raíz positiva y se encuentra en $(1, 2)$.

16)

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿Existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$? Justificar si la respuesta anterior está en contradicción con el teorema del valor medio.

b) Demostrar que $1 - \frac{a}{b} < \log \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$ si $0 < a < b$

Solución:

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

Por tanto la respuesta es no.

f no es continua en $[-1, 1]$ ni derivable en $(-1, 1)$; así pues, la respuesta no está en contradicción con el teorema del valor medio ya que la función f no verifica las hipótesis de dicho teorema en $[-1, 1]$.

b) Sea $f(x) = \log(x)$, $x \in [a, b]$; f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) = \frac{1}{x}$

Por el teorema del valor medio $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es decir,

$$\frac{1}{c} = \frac{\log(b) - \log(a)}{b - a} = \frac{\log \frac{b}{a}}{b - a} \quad \text{ó equivalentemente} \quad \log \frac{b}{a} = (b - a) \cdot \frac{1}{c}$$

$$0 < c < b \Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{b} \Rightarrow \log \frac{b}{a} > \frac{b - a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$$

$$0 < a < c \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \log \frac{b}{a} < \frac{b - a}{a} = \frac{b}{a} - 1$$

(nótese que $b - a > 0$)

17) Calcular, usando la regla de L' Hopital, los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - x}{x - \text{sen}(x)} \quad (x \rightarrow 0) \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))} \quad (x \rightarrow 0)$$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - x}{x - \text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + tg^2(x) - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2tg(x)(1 + tg^2(x))}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + tg^2(x))}{\cos(x)} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-a \text{sen}(ax)}{\cos(ax)}}{\frac{-b \text{sen}(bx)}{\cos(bx)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-atg(ax)}{-btg(bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2(1 + tg^2(ax))}{-b^2(1 + tg^2(bx))} = \frac{a^2}{b^2}$$

18) Dada la función $f(x) = \log(x+1)$

- Aproximar dicha función por una parábola en un entorno del cero.
- Acotar el error que se comete al considerar el valor del polinomio anterior para calcular $\log(1.1)$.

Solución:

a)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \text{ ó } c \in (x, 0)$$

$$= T_n(f, 0)(x) + R_n(f, 0)(x)$$

$$f(x) \cong T_2(f, 0)(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$f(x) = \log(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1 \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$\text{Por tanto:} \quad \log(x+1) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{b) } \log(1.1) = \log(0.1+1) = f(0.1) \approx 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.095$$

$$R_2(f, 0)(0.1) = f(0.1) - T_2(f, 0)(0.1) = \frac{f'''(c)}{3!}(0.1)^3 = \frac{2}{(c+1)^3}(0.1)^3 = \frac{1}{3(c+1)^3}(0.1)^3$$

$$c \in (0, 0.1) \Rightarrow c+1 > 1 \Rightarrow (c+1)^3 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{(c+1)^3} < 1$$

Por tanto:

$$|R_2(f, 0)(0.1)| < \frac{1}{3}(0.1)^3 = \frac{1}{3}10^{-3} < 5 \cdot 10^{-4}$$

19) Utilizar un desarrollo de Mac-Laurin adecuado para calcular $\text{sen}(1)$ con un error menor que 10^{-2} .

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sen}(x) &\Rightarrow f(0) = 0 & ; & \quad f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\text{sen}(x) &\Rightarrow f''(0) = 0 & ; & \quad f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \text{sen}(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 & ; & \quad f^{(5)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Resulta : } f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x) \quad , \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \text{sen}(x)$$

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(f, 0)(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \end{aligned}$$

$$R_{2n+1}(f, 0)(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1} \text{sen}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad , \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1} \text{sen}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad , \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

$$\text{sen}(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} \text{sen}(c)}{(2n+2)!} \quad , \quad c \in (0, 1)$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \text{sen}(c)}{(2n+2)!} \right| = \frac{|\text{sen}(c)|}{(2n+2)!} < \frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 2$$

$$\text{Si } n = 2, \quad 2n+1 = 5 \quad \text{y por tanto} \quad \text{sen}(1) \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$$

$$\text{sen}(1) \approx \frac{101}{120} \quad \text{con un error menor que } 10^{-2}$$

20) Demostrar que $x = 0$ es un punto crítico de la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos(x)$ y estudiar si es máximo, mínimo, punto de inflexión o ninguna de estas tres cosas.

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \sin(x) \Rightarrow f'(0) = 0, \text{ es decir, } x = 0 \text{ es un punto crítico}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \cos(x) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sin(x) \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 2$$

Como la primera derivada que no se anula en $x = 0$ es de orden par y dicha derivada es positiva aplicando el criterio de la derivada enésima resulta que $f(0) = 2$ es un mínimo relativo.

21) Hallar los extremos absolutos y relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ si $x \in [0, 3]$.

Solución:

Sabemos que una función continua en un intervalo cerrado alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en algún punto del intervalo. Los puntos críticos son en este caso los extremos del intervalo junto con los puntos interiores donde la derivada se anule o no exista.

f es derivable en todo punto por ser un polinomio.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$$

$$f(0) = 15; \quad f(1) = 20; \quad f(2) = 19; \quad f(3) = 24$$

$$\text{Por tanto:} \quad \max_{x \in [0,3]} f(x) = f(3) = 24; \quad \min_{x \in [0,3]} f(x) = f(0) = 15$$

Comprobemos que $f(1) = 20$ es un máximo relativo y $f(2) = 19$ un mínimo relativo.

$$f''(x) = 12x - 18 \Rightarrow f''(1) < 0 \quad \text{y} \quad f''(2) > 0$$

22) Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R .

Solución:

Sean x e y la base y la altura del rectángulo. Por el teorema de Pitágoras se verifica la siguiente relación: $x^2 + y^2 = (2R)^2$, es decir, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ y por tanto:

$A(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ es el área del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio R .

$$A'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}R$$

Se puede comprobar que $A'(\sqrt{2}R) < 0$, es decir, la función A alcanza un máximo en dicho punto. Las dimensiones son $x = \sqrt{2}R$, $y = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2}R$ y sería un cuadrado.

23) Sea $f(x) = x \cdot e^{1/x}$

- Determinar el dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad, puntos de inflexión y hacer un esbozo de la gráfica de f .
- ¿Es f acotada inferiormente o superiormente en su dominio? ¿Es acotada inferiormente en $(0, \infty)$? Calcular, si existen, el ínfimo de $f(x)$ en $(0, \infty)$ y el supremo de $f(x)$ en $(-\infty, 0)$.

Solución:

a) $Dom f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = 0 \cdot \infty \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad \text{ya que si } t \rightarrow +\infty, \quad e^t \gg t$$

Por tanto $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x} = +\infty \cdot 1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1/x} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = ax + b$, $a \neq 0$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1 \quad ; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1/x) = 1$$

$y = x + 1$ asíntota oblicua por los dos lados.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} (-1/x^2) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Si $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.
 Si $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(0, 1)$.
 Si $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

Extremos relativos:

Aplicando el criterio de la derivada primera resulta que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$, decir, $f(1) = e$ es un mínimo relativo.

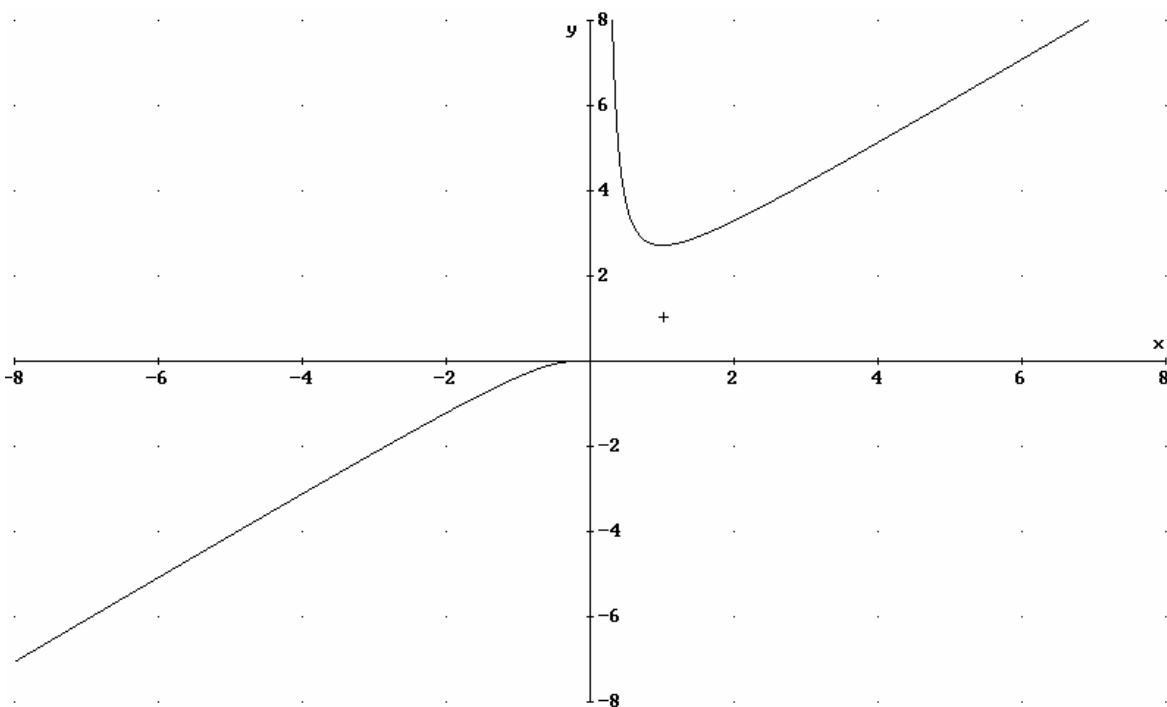
Concavidad:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}e^{1/x} = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

Si $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.
 Si $x \in (0, \infty)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

Puntos de inflexión:

No hay puesto que $0 \notin \text{Dom } f$



b) f no es acotada ni superiormente ni inferiormente en su dominio ya que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Obsérvese que $\text{Im } f = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$.

f es acotada inferiormente en $(0, +\infty)$ ya que si $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in [e, +\infty)$

$$\inf_{x \in (0, +\infty)} f(x) = e$$

f es acotada superiormente en $(-\infty, 0)$ ya que si $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) \in (-\infty, 0)$

$$\sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 0$$

24) Se considera la función $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$

que tiene un único punto de inflexión aproximadamente en $(-0.9, -0.3)$.

- Determinar el dominio, continuidad, asíntotas, monotonía, concavidad y hacer un esbozo de la grafica de f .
- ¿Es f acotada superiormente en su dominio? ¿Es f acotada superiormente en $(0, \infty)$? ¿Es f acotada superiormente e inferiormente en $(0.5, 1)$? Razonar las respuestas.

Solución:

a) $\text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Continuidad:

Es continua en todo su dominio por ser diferencia y cociente de funciones continuas.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} - 1 = +\infty - 1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} - 1 = -\infty - 1 = -\infty$$

$x = 0$ es una asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - e^{+\infty} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - e^{-\infty} = 1$$

$y = 1$ es una asíntota horizontal para $x \rightarrow +\infty$

Asíntotas oblicuas: $y = ax + b$, $a \neq 0$

Solamente podría tenerla para $x \rightarrow -\infty$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = 0 - (-\infty) = +\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en su dominio.}$$

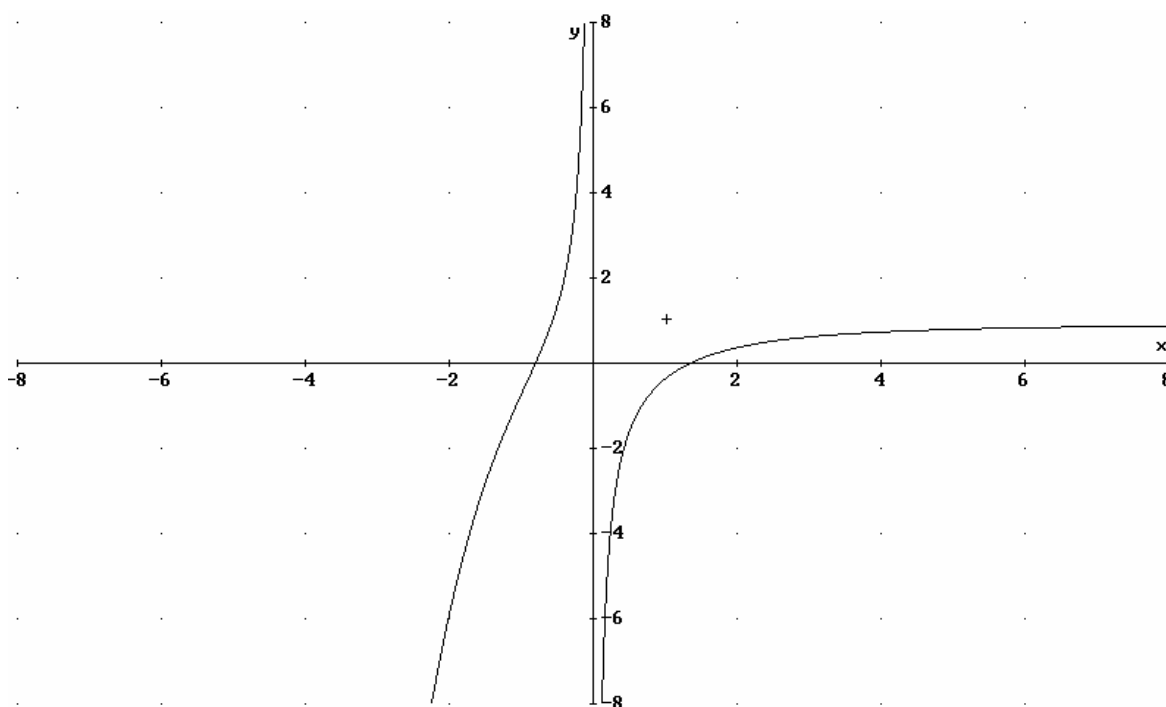
No tiene extremos relativos

Concavidad:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x \approx -0.9$$

Si $x \in (-\infty, -0.9) \cup (0, +\infty)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$
 f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -0.9) \cup (0, +\infty)$.

Si $x \in (-0.9, 0)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en $(-0.9, 0)$.



b) f no es acotada superiormente en su dominio ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$. Nótese que

$$\text{Im } f = (-\infty, +\infty)$$

f es acotada superiormente en $(0, +\infty)$ ya que si $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in (-\infty, 1)$

f es acotada superiormente e inferiormente en $(0.5, 1)$ ya que si

$$x \in (0.5, 1), \quad f(x) \in (-1 - e^{-0.5}, -e^{-1})$$

