

CALCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13

TEMA 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.1: Conjuntos Numéricos.

Un *conjunto* es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman los *elementos* del conjunto. Para indicar que un elemento x está en el conjunto A escribimos $x \in A$ y para indicar lo contrario escribimos $x \notin A$. A menudo se representan los conjuntos mediante llaves encerrando a sus elementos. Así pues $1 \in \{-1, 0, 1, 2\}$ pero $0 \notin \{1, 2, 3\}$.

De los conjuntos numéricos se definen en primer lugar los *números naturales* $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ con los cuales se pueden realizar las operaciones de suma y multiplicación para que el resultado siga siendo un número natural.

Método de inducción.

Se considera el conjunto $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Sea P una propiedad que puede verificar o no un número natural; expresamos que $P(n)$ es cierto si el número natural n verifica la propiedad P . Si se verifica

- i) $P(1)$ es cierto, es decir, el primer número natural verifica P .
- ii) Si es cierto $P(n)$ entonces también lo es $P(n+1)$.

Entonces todo número natural verifica la propiedad P .

Ejercicio:

Demostrar aplicando el principio de inducción que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in N$

Solución:

Para $n = 1$ obtenemos $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que es cierta la igualdad para n y debemos demostrarla para $n+1$: $1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

A continuación se definen los *números enteros* $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ con los cuales se pueden realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación para que el resultado siga siendo un número entero. Seguidamente se consideran los *números racionales*

$Q = \{p/q ; p, q \in Z \text{ y } q \neq 0\}$ con los cuales se pueden realizar las cuatro operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división por un número distinto de cero.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{expresión decimal constituida por un número finito de cifras decimales}$$

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \dots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

número infinito de cifras decimales pero repetidas periódicamente.

Veamos ahora que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir, que $\sqrt{2}$ no se puede expresar de la forma p/q siendo esta una fracción irreducible (es decir que p y q no tienen divisores comunes a excepción de la unidad).

Si $\sqrt{2} = p/q \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ es par $\Rightarrow p$ es par ; entonces $\exists k \in \mathbb{N} / p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ es par $\Rightarrow q$ es par .

En este caso p y q serían pares lo que contradice el hecho de que p y q no tengan divisores comunes.

Los números como $\sqrt{2}$, π , ... se les llama *irracionales*; el conjunto de los números racionales ampliado con los irracionales forman el conjunto de los números *reales* $\mathbb{R}$.

Así, por ejemplo, las raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 3x + 1 = 0$ son números reales

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{irracionales}$$

Sin embargo, las raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 2x + 3 = 0$ no son números reales.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} i \quad \text{números complejos o imaginarios.}$$

Si A y B son conjuntos, entonces decimos que A está contenido en B y lo representamos $A \subset B$ si y sólo si todo elemento de A es también un elemento de B (se dice que A es un subconjunto de B).

Así, por ejemplo, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Producto cartesiano.

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplos:

$$\text{Si } A = \{0, 1\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\} \quad B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$$

$$\text{Si } A = B = [0, 1] \quad , \quad A \times B = \{(x, y) / x \in [0, 1], y \in [0, 1]\} \quad \text{cuadrado unidad}$$

Intersección.

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\} \quad ; \quad \text{si } A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

Ejemplos:

$$A = \{\text{múltiplos de } 3\} \quad , \quad B = \{\text{múltiplos de } 4\} \quad , \quad A \cap B = \{\text{múltiplos de } 12\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\} \quad , \quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$$

Unión.

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\} \quad ; \quad \text{si } A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

Ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\} \quad \quad \quad A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$$

Propiedades de orden en $\mathbb{R}$

- * o bien $a < b$, o $b < a$, o $a = b$
- * Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$
- * Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- * Si $a \leq b$ y $c > 0$ entonces $ac \leq bc$
- * Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$. Por tanto si $a \leq b$ entonces $-a \geq -b$
- * Si $a \leq b$, siendo a y b no nulos del mismo signo, entonces $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Valor absoluto de un número real.

Dado un número real x el valor absoluto de x , denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera, $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Otras caracterizaciones son,

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad ; \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

interpretación geométrica: $|x|$ = distancia entre x y 0 .

$|x - c|$ = distancia entre x y c .

Ejemplos:

$$|x - 1| = x - 1 \quad \text{si } x \geq 1 \quad ; \quad |x - 1| = 1 - x \quad \text{si } x \leq 1$$

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= x^2 - 1 \quad \text{si } x^2 \geq 1 \quad ; \quad |x^2 - 1| = 1 - x^2 \quad \text{si } x^2 \leq 1 \quad , \text{ es decir,} \\ |x^2 - 1| &= x^2 - 1 \quad \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \quad ; \quad |x^2 - 1| = 1 - x^2 \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Ejercicio:

Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+3| + |x-3| < 8$

Propiedades del valor absoluto.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Se verifica

- 1) $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $|-x| = |x|$
- 3) $|xy| = |x||y|$
- 4) $-|x| \leq x \leq |x|$
- 5) $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$
- 6) $|x-c| \leq \delta \Leftrightarrow c-\delta \leq x \leq c+\delta$
- 7) $|x+y| \leq |x|+|y|$; $|x-y| \leq |x|+|y|$
- 8) $|x-y| \geq |x|-|y|$
- 9) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

Ejercicio:

Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-2| \geq 1$

Solución:

$$|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \text{ ó } x-2 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ó } x \leq 1$$

Ejercicio:

Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x^2-1| \geq 1$

Solución:

$$\begin{aligned} |x^2-1| \geq 1 &\Leftrightarrow x^2-1 \geq 1 \text{ ó } x^2-1 \leq -1 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \text{ ó } x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &|x| \geq \sqrt{2} \text{ ó } x=0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2} \text{ ó } x \leq -\sqrt{2} \text{ ó } x=0 \end{aligned}$$

Ejercicio:

Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1$

Solución:

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

$$\text{Si } x > -1, \quad -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x-1 \leq x \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1/2$$

$$\text{Si } x < -1, \quad -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -x-1 \geq x \geq x+1 \quad \text{no existe } x$$

Así pues, la solución son los $x \geq -1/2$.

Ejercicio:

$$\text{Hallar los } x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq 1$$

Conjuntos acotados.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado superiormente $\Leftrightarrow : \exists M \in \mathbb{R} / x \leq M \quad \forall x \in A$
 M se denomina cota superior para A

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado inferiormente $\Leftrightarrow : \exists m \in \mathbb{R} / x \geq m \quad \forall x \in A$
 m se denomina cota inferior para A

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado $\Leftrightarrow : \text{está acotado superior e inferiormente} \Leftrightarrow$
 $\exists K \in \mathbb{R}^+ / |x| \leq K \quad \forall x \in A$

Axioma del supremo (ínfimo).

Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente. Entonces A tiene extremo superior o *supremo*, denotado por $\sup A$, que coincide con la menor de las cotas superiores.

Sea A un conjunto de números reales acotado inferiormente. Entonces A tiene extremo inferior o *ínfimo*, denotado por $\inf A$, que coincide con la mayor de las cotas inferiores.

Si el supremo pertenece al conjunto A se llama *máximo* y se denota $\max A$.

Si el ínfimo pertenece al conjunto A se llama *mínimo* y se denota $\min A$.

Intervalos acotados.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} \quad \text{intervalo abierto} \quad ; \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \quad \text{cerrado}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} \quad ; \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

Intervalos no acotados.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \quad ; \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\} ; \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} ; \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Ejercicio

Hallar, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ siguientes:

$$\text{a) } A = (0, 4) \quad \sup A = 4 \quad ; \quad \inf A = 0 \quad ; \quad \text{no existe máximo ni mínimo de } A.$$

$$\text{b) } B = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \inf B = \min B = 1 \quad ; \quad \text{no existe supremo ni máximo de } B.$$

$$\text{c) } C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \quad \sup C = \max C = 1 \quad ; \quad \inf C = 0 \quad ; \quad \text{no existe mínimo de } C.$$

$$d) D = \{x / x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} ; \quad x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -6$$

$$x^2 + 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+6) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x-1) \leq 0 \quad \text{y} \quad (x+6) \geq 0 \quad \text{ó} \\ (x-1) \geq 0 \quad \text{y} \quad (x+6) \leq 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \quad \text{y} \quad x \geq -6 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \quad \text{y} \quad x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad \text{y} \quad x \geq -6$$

$$D = [-6, 1] \quad \sup D = \max D = 1 \quad ; \quad \inf D = \min D = -6$$

1.2: Funciones reales de una variable real.

Nociones preliminares.

Se llama función real de variable real a toda aplicación $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un conjunto de números reales denominado *dominio* de la función. Designaremos por x a un elemento de D y por $y = f(x)$ a su *imagen* por la aplicación f .

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} \quad , \quad \text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D, f(x) = y\} = f(D)$$

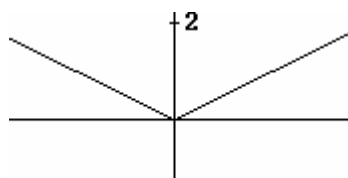
Ejemplos:

$f(x) = x^2$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$	$\text{Im } f = [0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+4}$	$\text{Dom } f = [-4, +\infty)$	$\text{Im } f = [0, +\infty)$
$f(x) = \frac{1}{x-1}$	$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$	$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$

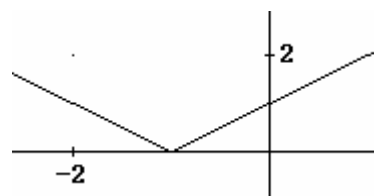
El conjunto de todos los puntos del plano $(x, f(x))$ con $x \in D$ forman la *gráfica* de la función f

Ejemplos:

$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = |x+1|$$



Función monótona.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, y $S \subset D$.

$$f \text{ es monótona creciente en } S \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$f \text{ es monótona decreciente en } S \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

f es estrictamente creciente en $S \Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 f es estrictamente decreciente en $S \Leftrightarrow: \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.
 $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo R .

Función acotada.

Sea $f : D \subset R \rightarrow R$ una función real de variable real, y $S \subset D$.

f está acotada superiormente en $S \Leftrightarrow: \exists M \in R / f(x) \leq M \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado superiormente.

f está acotada inferiormente en $S \Leftrightarrow: \exists m \in R / f(x) \geq m \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado inferiormente.

f está acotada en $S \Leftrightarrow: f$ está acotada superiormente e inferiormente en $S \Leftrightarrow$
 $\exists K \in R^+ / |f(x)| \leq K \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado.

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ está acotada inferiormente en R y no está acotada superiormente en R ya que $\text{Im } f = [0, +\infty)$. Por tanto $\inf_{x \in R} f(x) = 0 = \min_{x \in R} f(x)$; $\sup_{x \in R} f(x)$ y $\max_{x \in R} f(x)$ no existen.

$f(x) = x^2$ está acotada en el intervalo $[-5, 9]$ ya que $\text{Im } f = [0, 81]$. Por tanto
 $\inf_{x \in [-5, 9]} f(x) = 0 = \min_{x \in [-5, 9]} f(x)$; $\sup_{x \in [-5, 9]} f(x) = 81 = \max_{x \in [-5, 9]} f(x)$

$f(x) = x^2$ está acotada en el intervalo $(-5, 9)$ ya que $\text{Im } f = [0, 81]$. Por tanto
 $\inf_{x \in (-5, 9)} f(x) = 0 = \min_{x \in (-5, 9)} f(x)$; $\sup_{x \in (-5, 9)} f(x) = 81$, $\max_{x \in (-5, 9)} f(x)$ no existe.

Ejercicio.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2} - 2}$$

Obtener el dominio y la imagen de f . ¿Es f acotada en su dominio? Determinar, si existen, el supremo, máximo, ínfimo y mínimo de f en su dominio

Función par e impar: Simetrías.

Sea $f : D \subset R \rightarrow R$ tal que $-x \in D$ si $x \in D$

f es par $\Leftrightarrow: f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$
 f es impar $\Leftrightarrow: f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas y la grafica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejemplos:

$$f(x) = x^4 \text{ es par} \quad ; \quad f(x) = x^7 \text{ es impar}$$

Función periódica.

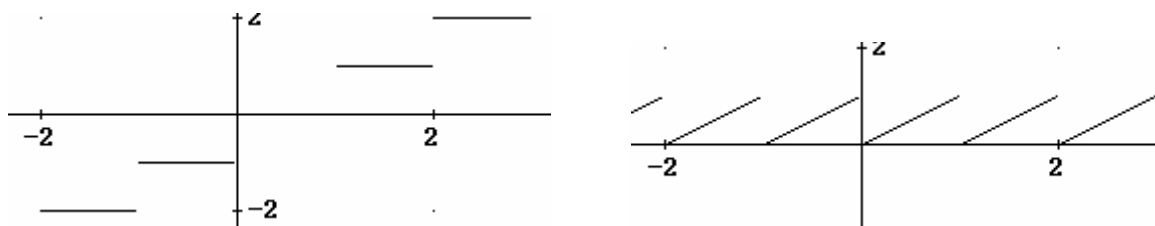
Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

$$f \text{ es periódica} \Leftrightarrow \text{ existe } h \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } f(x) = f(x+h) \quad \forall x \in D$$

El período p de una función periódica es el valor más pequeño de h que verifica la igualdad anterior.

Ejercicio:

Sea $f(x) = [x]$ función parte entera de x , es decir, la función que a cada número real le asigna el mayor entero que sea menor o igual a él (función floor en Matlab). Comprobar que la función $g(x) = x - f(x) = x - [x]$ es periódica de período uno.



Operaciones con funciones.

Sean f y g dos funciones reales de variable real tales que $\text{Dom } f = \text{Dom } g = D$. Definimos la función suma de la forma siguiente:

$$f + g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (f + g)(x) =: f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$$

La función nula $0_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0_f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ verifica $f + 0_f = f$

La función opuesta de f , $-f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(-f)(x) =: -f(x) \quad \forall x \in D$ verifica $f + (-f) = 0_f$

Definimos la función producto $fg : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(fg)(x) =: f(x)g(x) \quad \forall x \in D$$

La función unidad $1_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $1_f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ verifica $f 1_f = f$

La función recíproca de f , $\frac{1}{f} : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{1}{f}\right)(x) =: \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in D_1$

siendo $D_1 = \{x \in D / f(x) \neq 0\}$, verifica $f \frac{1}{f} = 1_f$.

Definimos la función cociente $\frac{f}{g}: D_2 \subset R \rightarrow R$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =: \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D_2$
 siendo $D_2 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

Nota: Si $Dom f \neq Dom g$ con $Dom f \cap Dom g \neq$ conjunto vacío, entonces:

$$Dom(f + g) = Dom(fg) = Dom f \cap Dom g$$

$$Dom(f/g) = (Dom f \cap Dom g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Ejemplos:

$$* \quad f(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{x}{x-1} \quad Dom f = R \quad Dom g = R - \{1\}$$

$$(f + g)(x) = x^2 + \frac{x}{x-1} = \frac{x^3 - x^2 + x}{x-1} \quad Dom(f + g) = R - \{1\}$$

$$(fg)(x) = \frac{x^3}{x-1} \quad Dom(fg) = R - \{1\}$$

$$* \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 + x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (fg)(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } x \geq 1 \end{cases}$$

Composición de funciones y función inversa.

Sean dos funciones f y g tales que $Im g \cap Dom f \neq$ conjunto vacío. Definimos la función “ g compuesta con f ” y se denota $f \circ g$ de la siguiente forma:

$$(f \circ g)(x) =: f(g(x)) \quad \forall x \in Dom g \mid g(x) \in Dom f$$

Análogamente, si $Im f \cap Dom g \neq$ conjunto vacío, se define la función “ f compuesta con g ” y se denota $g \circ f$ de la siguiente forma:

$$(g \circ f)(x) =: g(f(x)) \quad \forall x \in Dom f \mid f(x) \in Dom g$$

La composición de funciones verifica la propiedad asociativa, es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. No verifica, en general, la propiedad conmutativa, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$. El elemento neutro de la composición es la función *identidad* I , es decir, $f \circ I = f = I \circ f$ siendo $I(x) = x \quad \forall x \in R$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x & g(x) &= \sqrt[3]{x} & \text{Dom } f &= \text{Dom } g = \mathbb{R} \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt[3]{x^2 + x} \end{aligned}$$

Ejercicio.

Obtener $f \circ g$, $g \circ f$ y sus dominios respectivos en los casos siguientes:

- a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
 b) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2 + 1$

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow : \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad / \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1) \quad \text{no es inyectiva en } \mathbb{R} \quad \text{ya que} \quad f(0) = f(1) \\ f(x) &= x^3 \quad \text{es inyectiva.} \\ f(x) &= x^2 \quad \text{no es inyectiva en } \mathbb{R}. \text{ Lo es en } [0, +\infty) \text{ y en } (-\infty, 0] \end{aligned}$$

Si f es una función inyectiva (en cierto dominio) entonces existe una única función g definida sobre la imagen de f , es decir, $g : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(g(x)) = x$ $\forall x \in \text{Im } f = \text{Dom } g$. Así pues, $\text{Im } g = \text{Dom } f$. A esta función g se le llama inversa de la función f y se denota por f^{-1} . Por tanto

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \text{Im } f, \text{ es decir, } f \circ f^{-1} = I$$

$$\text{Se verifica también que } f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{Dom } f, \text{ es decir, } f^{-1} \circ f = I$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f^{-1}(x) &= x \\ f(x) &= \frac{1}{x} & f^{-1}(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= \sqrt[3]{x} & f^{-1}(x) &= x^3 \\ f(x) &= 1 - (x-2)^{1/3} & f^{-1}(x) &= (1-x)^3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Veamos esto último, } f(f^{-1}(x)) &= x \Leftrightarrow 1 - (f^{-1}(x) - 2)^{1/3} = x \Leftrightarrow (f^{-1}(x) - 2)^{1/3} = 1 - x \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x) = (1-x)^3 + 2 \end{aligned}$$

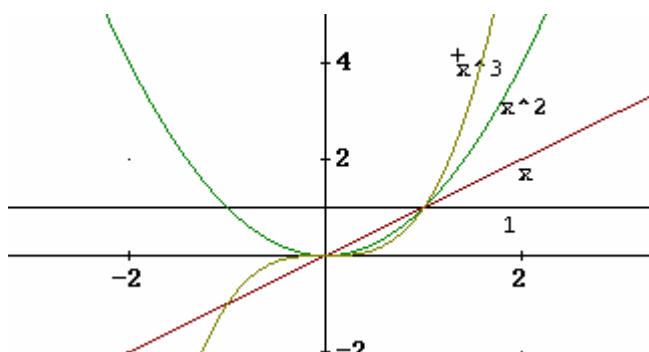
Ejercicio.

Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0.5, \infty)$

*Funciones elementales.**Función potencial entera*

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}$ si n es impar, $[0, +\infty)$ si $n > 0$ es par, $\{1\}$ si $n=0$
 Si n es impar entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

*Función polinómica.*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad a_n \neq 0$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Si $n=1$ recta; si $n=2$ parábola, ...

Función racional.

Es cociente de dos funciones polinómicas.

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}; \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Funciones circulares y sus inversas.

$$f(x) = \text{sen}(x) \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$$

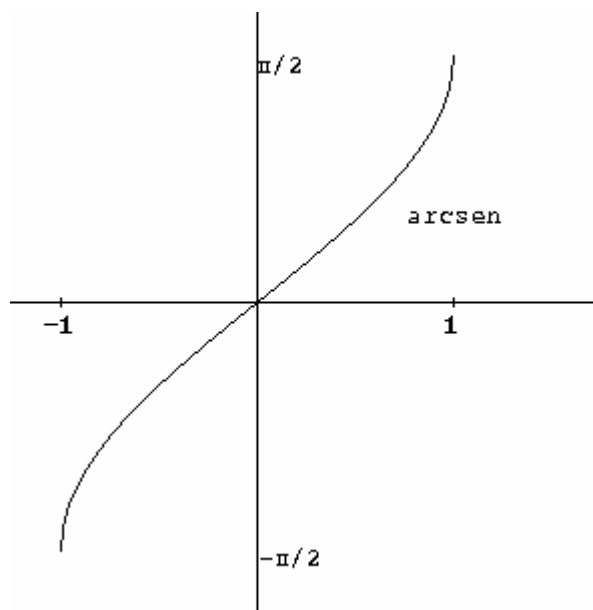
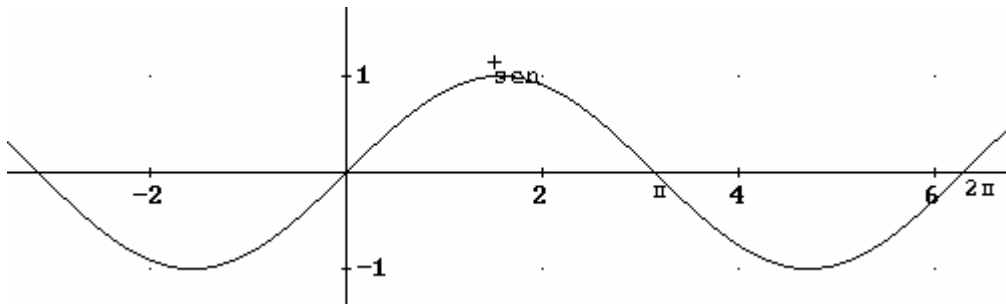
es acotada, impar y periódica de periodo 2π

$$f(x) = \arcsen(x)$$

Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función seno sea inyectiva, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

Para cada $x \in [-1, 1]$ se define $\arcsen(x)$ como el único $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}(y) = x$

$$\text{Dom} = [-1, 1] \quad \text{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{es acotada, creciente e impar}$$



$$f(x) = \cos(x) \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$$

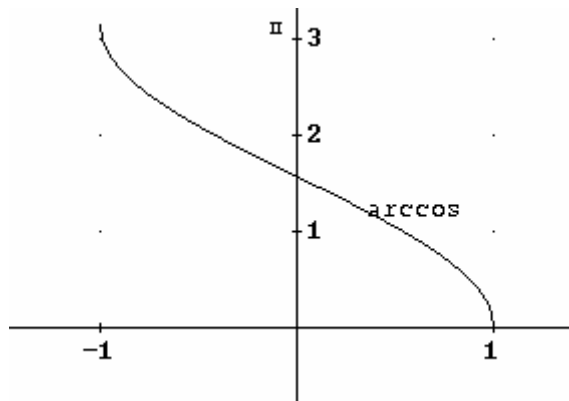
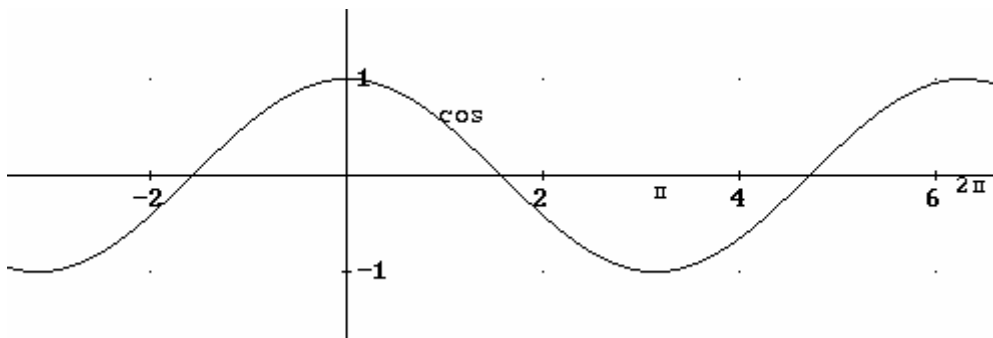
es acotada, par y periódica de periodo 2π

$$f(x) = \arccos(x)$$

Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función coseno sea inyectiva, $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

Para cada $x \in [-1, 1]$ se define $\arccos(x)$ como el único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos(y) = x$

$Dom = [-1, 1]$ $Im = [0, \pi]$ es acotada y decreciente



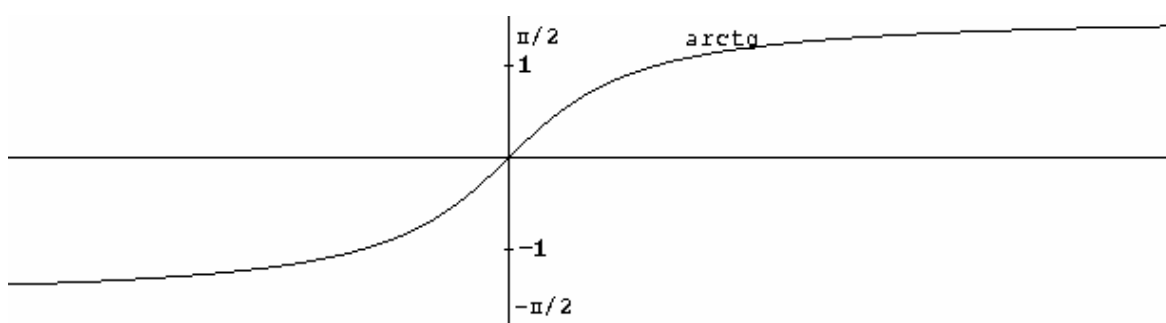
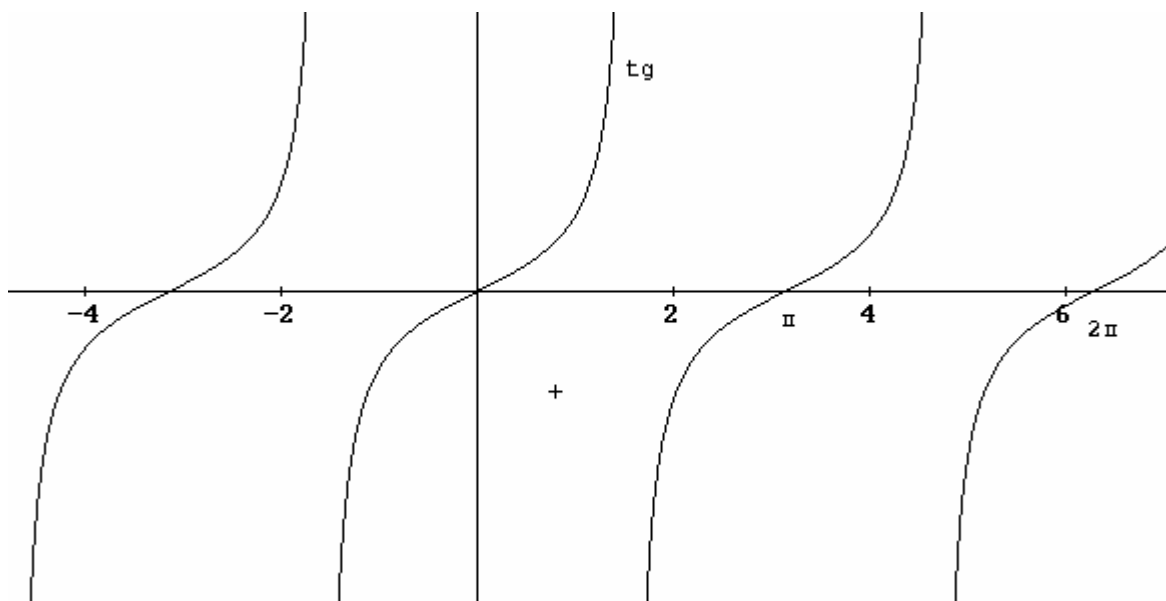
$$f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$Dom\ f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad Im\ f = \mathbb{R}$$

No es acotada en su dominio. Es impar y periódica de periodo π

Para cada número real x se define $\operatorname{arctg}(x)$ como el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}(y) = x$

$Dom = \mathbb{R}$ $Im = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es acotada, creciente e impar



$$f(x) = \cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \quad ; \quad f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$f(x) = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Se verifica:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad ; \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad ; \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad ; \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) \quad ; \quad \operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cot^2(x)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

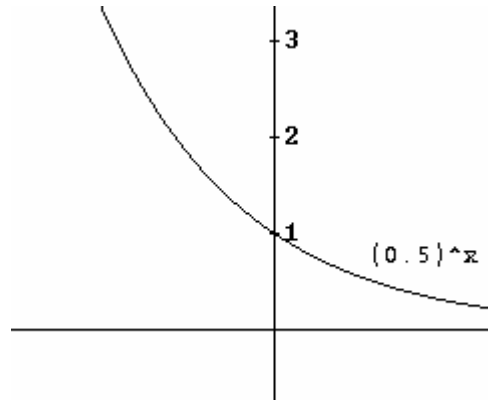
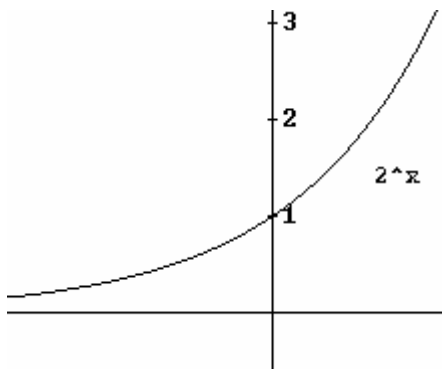
Función exponencial.

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} \quad ; \quad \text{Im} = (0, \infty) \text{ si } a \neq 1, \quad \text{Im} = \{1\} \text{ si } a = 1$$

Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

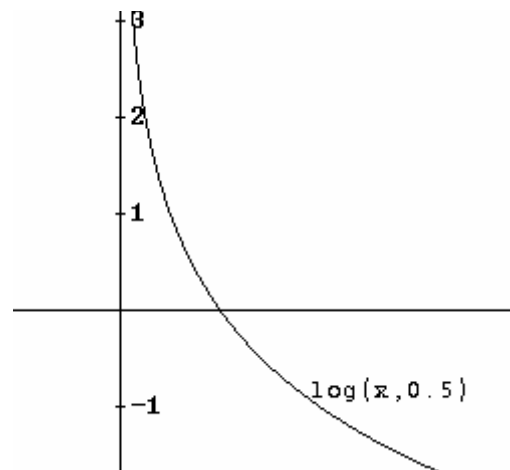
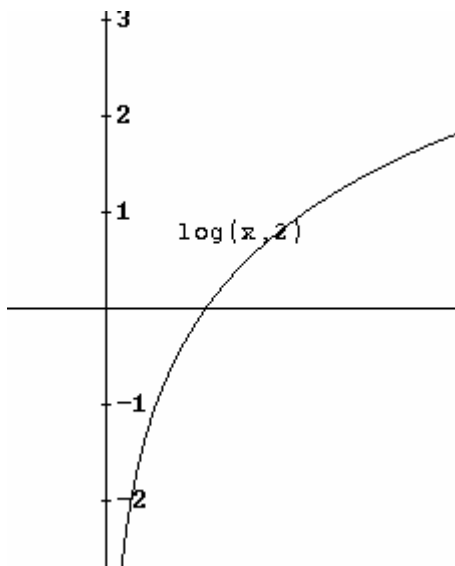


Función logarítmica.

Se llama función logarítmica de base $a > 0$ ($a \neq 1$), $f(x) = \log_a(x)$, a la inversa de la función exponencial.

$$\text{Dom} = (0, \infty) \quad ; \quad \text{Im} = \mathbb{R}$$

Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.



Si $a = e$, el logaritmo se llama neperiano o natural y se representa $\log(x)$ ó $\ln(x)$. Si $a = 10$ se llama decimal.

Se verifica:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad ; \quad a^x = e^{x \cdot \ln(a)} \quad ; \quad \log_a(1) = 0 \quad ; \quad \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

1.3: Límites de funciones.

Límite finito en un punto.

Consideremos una función f definida en las “proximidades” de un punto c , aunque no necesariamente en c , es decir, $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y c punto de acumulación de D . La función f tiene límite $l \in \mathbb{R}$ en el punto c si “ $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x este suficientemente próximo a c ”. La definición rigurosa es la siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$x \in D$$

δ depende, en general, de ε y del punto c .

El límite es independiente de que la función este o no definida en el punto c .

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c} \quad \forall c > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

$$x \geq 0$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left| \frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon \quad ; \quad \delta = \sqrt{c} \cdot \varepsilon$$

Límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$x \in D$$

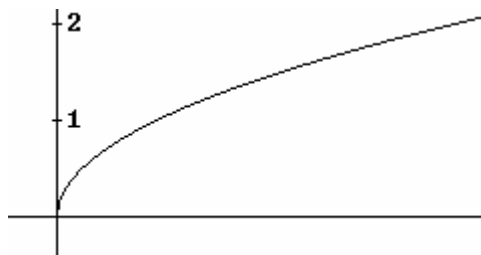
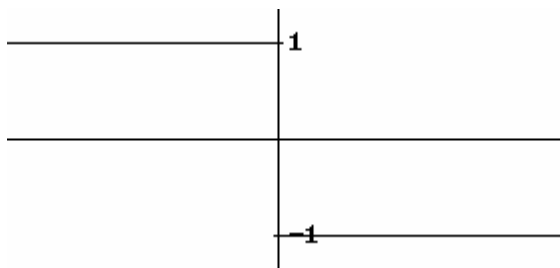
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejemplos:

$$f(x) = -1 \quad \text{si } x > 0 \quad , \quad f(x) = 1 \quad \text{si } x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$



No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ en el ejemplo anterior ya que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

Límites infinitos.

La función f tiene límite $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) en el punto c si “ $f(x)$ se puede hacer tan grande (resp. tan pequeña) como queramos, siempre que x este suficientemente próximo a c ”. Análogamente se definen los límites laterales infinitos.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Límite finito en el infinito.

La función f tiene límite l cuando la variable x tiende a $+\infty$ (res. $-\infty$) si “ $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x sea suficientemente grande (res. pequeño)”.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (0.5)^x = 0$$

Límite infinito en el infinito.

De manera análoga se pueden considerar límites infinitos cuando la variable x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

Se verifica:

- Si una función tiene límite, finito o infinito, en un punto c ó en $\pm\infty$, entonces dicho límite es único.
- *Teorema de la función intermedia.* Sean f , g y h tres funciones reales definidas en las “proximidades” de un punto c y supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x perteneciente a un entorno reducido de c , es decir, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) - \{c\}$. Si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$. c y l pueden ser finitos ó infinitos.
- Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno reducido de c entonces se verifica que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

Ejemplo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{ya que} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{y} \quad \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \quad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x) - l| = 0$$

Operaciones con límites de funciones.

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = m \in \mathbb{R}$ siendo $c \in \mathbb{R}$ ó $c = \pm\infty$, se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = l + m ; \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = l - m ; \quad \lim_{x \rightarrow c} [a \cdot f(x)] = a \cdot l \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = l \cdot m ; \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad \text{si} \quad m \neq 0$$

Si alguno o ambos de los límites l y m es infinito se verifica un resultado análogo, aunque se pueden presentar indeterminaciones. Veamos esto con más detalle.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l < 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = -\infty, \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

Indeterminaciones.

$$\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Asíntotas.

$x = a$ es una *asíntota vertical* de la función f si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty & \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{por la izquierda} \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{por la derecha} \end{array}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{x}{1-x}} = 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x}{1-x}} = 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{1-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{1-x}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$$

$x = 1$ no es asíntota vertical

$y = b$ es una *asíntota horizontal* de la función f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{y/o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

En el caso de que ambos límites sean iguales a “b” la curva $y = f(x)$ se “pega” a la asíntota por los dos lados (en la parte de la derecha y en la de la izquierda).

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$$

Se obtienen los mismos resultados si $x \rightarrow -\infty$.

$y = \frac{e}{e-1}$ es una asíntota horizontal por los dos lados.

$y = ax + b$, $a \neq 0$, es una *asíntota oblicua* de la función f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{y/o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

a y b se determinan de la siguiente manera:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a.x]$$

y/o lo mismo con límite en el $-\infty$, pero en cualquiera de los casos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Una función puede tener una asíntota horizontal y una oblicua pero no en el mismo “lado”.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \quad \text{no tiene asíntotas oblicuas}$$

Ejercicio.

Obtener las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

Infinitésimos e infinitos.

Se dice que la función f es un *infinitésimo* en el punto $c \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

Se dice que la función f es un *infinito* en el punto $c \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$

Las definiciones anteriores y las que siguen se pueden extender al caso $c = +\infty$, $c = -\infty$

Dadas dos funciones f y g infinitésimos en el punto c se dice que f es de *orden superior* a g si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ y se dice que f es de *orden inferior* a g si $\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ es de orden superior a $g(x) = x$ en $c = 0$

$f(x) = x - 1$ es de orden inferior a $g(x) = 2(x - 1)^2$ en $c = 1$

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ sea un número real distinto de cero las dos funciones son infinitésimos del *mismo orden* en el punto c .

Ejemplo:

$2x \cos(x)$ es un infinitésimo del mismo orden que x cuando $x \rightarrow 0$.

Dadas dos funciones f y g infinitésimos en el punto c se dice que f y g son *equivalentes*, cuando $x \rightarrow c$, y se denota $f \approx g$ si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ejemplo:

$x \cos(x)$ es un infinitésimo equivalente a x cuando $x \rightarrow 0$.

Ejemplos de infinitésimos equivalentes.

$$\operatorname{sen}(x) \approx x \approx \operatorname{arcsen}(x) \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg}(x) \approx x \approx \operatorname{arctg}(x) \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

$$1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2} \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) \approx x \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad ; \quad \log(x) \approx x-1 \quad \text{si } x \rightarrow 1$$

$$a^x - 1 \approx x \cdot \log(a) \quad a > 0 \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad ; \quad e^x - 1 \approx x \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

Ejercicio:

Calcular, empleando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{2^x - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\log(1+x)}$$

Dadas dos funciones f y g infinitos en el punto c se dice que f es de *orden superior* a g

si $\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$ y se dice que f es de *orden inferior* a g si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejemplo:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ es un infinito de orden superior a $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \rightarrow 0$

Jerarquía de infinitos.

Si $x \rightarrow +\infty$ $\log(x) \ll x^p \ll e^x$ ($p > 0$, $\ll$ significa orden inferior)

Ejercicio:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{1/x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad , \quad \text{ya que si } t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad e^t \gg t$$

Por tanto el límite pedido no existe (por no coincidir los límites laterales).

1.4: Continuidad de funciones.

Funciones continuas. Tipos de discontinuidades.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. f es continua en $c \Leftrightarrow$:

- 1) $c \in D$, es decir, f está definida en c .
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Si no se verifica alguna de estas condiciones se dice que f es discontinua en c .

Se dice que f presenta una *discontinuidad evitable* en el punto c si $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$, pero es distinto de $f(c)$ ó la función no está definida en c .

Ejemplos.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se dice que f presenta una *discontinuidad esencial* en el punto c si no existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ como número real. Es de *salto finito* si $\exists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R}$ pero son distintos.

Ejercicio.

Estudiar el tipo de discontinuidad en el punto 0 de la función $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0}{1 + 0} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

es una discontinuidad esencial de salto finito.

Continuidad lateral.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. f es continua por la derecha en $c \Leftrightarrow$

- 1) $c \in D$, es decir, f está definida en c .
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda en c . Se verifica que f es continua en $c \Leftrightarrow f$ es continua por la derecha y por la izquierda en c .

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

es continua por la izquierda en 0 pero no por la derecha (por lo visto en el ejercicio anterior).

f es continua en un intervalo abierto cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

f es continua en un intervalo cerrado $[a, b] \Leftrightarrow$: f es continua en todos los puntos del abierto (a, b) , es continua por la derecha en a y es continua por la izquierda en b .

Continuidad de las funciones elementales.

- La función potencial entera $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.
- Las funciones racionales son continuas en $\mathbb{R}$ excepto en los puntos que anulan al denominador.
- La función seno y la función coseno son continuas en $\mathbb{R}$.
- La función tangente es continua en su dominio.
- La función exponencial es continua en $\mathbb{R}$.
- La función logarítmica es continua en su dominio.

Ejercicio.

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x-1)} & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 0 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Propiedades de las funciones continuas.

* Si f y g son continuas en un punto c , entonces las funciones $f + g$, $f - g$ y fg son también continuas en c . Si, además, $g(c) \neq 0$ entonces f/g es también continua en c .

* Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces $f \circ g$ es continua en c .

Ejercicio.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x.e^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

Teorema de Bolzano.

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$, es decir, f cambia de signo en los extremos del intervalo, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Se dice que c es raíz de la ecuación $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 0$

Ejercicios.

* ¿Se puede aplicar Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in (0, 1]$, $f(0) = -1$ en el intervalo $[0, 1]$?

* Demostrar que la ecuación $\frac{x}{2} - \sin(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Teorema de Darboux (del valor intermedio).

Sea f continua en $[a, b]$ y " d " un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$, es decir, f alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema.

Si f es continua en $[a, b] \Rightarrow f$ está acotada en $[a, b]$, es decir,
 $\exists K \in \mathbb{R}^+ / |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$.

Teorema de Weierstrass.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en dicho intervalo, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$.

el mínimo sería $f(x_1)$ y el máximo $f(x_2)$

1.5: Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

Derivada de una función en un punto: interpretación geométrica.

Se dice que una función $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto c perteneciente al interior de D , si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada de f en el punto c , y se denota por $f'(c)$.

Nótese que $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ es la pendiente de la recta secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$.

La derivada de f en c , si existe, es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$. La ecuación de esta recta es: $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.

Si $f'(c) = 0$, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es una recta horizontal.

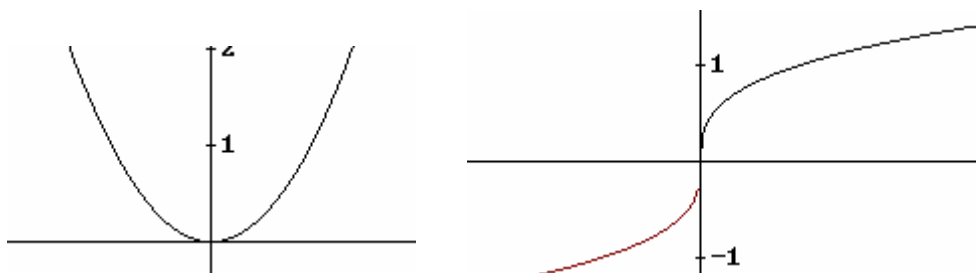
Si $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right| = +\infty$ se dice que f tiene derivada infinita en c (aunque no es derivable en c).

Ejemplos:

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

La tangente a $y = x^2$ en el punto $(0,0)$ es $y = 0$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2/3} = +\infty$$



Derivadas laterales

Si f está definida en un intervalo a la derecha de c , se dice que f es derivable por la derecha en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada por la derecha de f en el punto c , y se denota por $f'(c^+)$.

Análogamente, se define la derivada por la izquierda

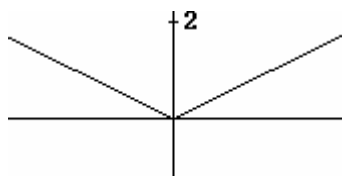
$$f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Se verifica que f es derivable en $c \Leftrightarrow f$ es derivable por la derecha y por la izquierda en c y ambos valores coinciden.

Si en un punto c en el que f es continua se tienen derivadas laterales finitas y distintas, la gráfica de f presenta un “pico” en el punto c y se dice que $(c, f(c))$ es un punto anguloso.

Ejemplo:

$$f(x) = |x| \quad \text{no es derivable en el cero.}$$



$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad ; \quad f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

De forma similar se definen las derivadas laterales infinitas en caso de que los límites laterales correspondientes sean infinitos (también puede ocurrir que uno de los límites laterales sea infinito y el otro no).

Ejercicio:

Comprobar que la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ tiene derivadas laterales infinitas en el cero.

Función derivada: ejemplos.

f es derivable en un subconjunto abierto de R si lo es en todos sus puntos.

Dada $f : D \subset R \rightarrow R$, en los puntos en que f sea derivable tiene sentido hablar de la función derivada

$$\begin{array}{ccc} f' : D^* \subset R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & f'(x) \end{array} \quad D^* \subset D$$

Ejemplos:

- $f(x) = k \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0 \quad \forall x \in R$$

- $f(x) = x \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \quad \forall x \in R$$

- $f(x) = x^2 \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \quad \forall x \in R$$

- $f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$$

- $f(x) = |x| \quad \forall x \in R$

$$f'(x) = 1 \quad \text{si } x > 0 \quad ; \quad f'(x) = -1 \quad \text{si } x < 0$$

Derivabilidad y continuidad.

Si f es derivable en un punto c , entonces f es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto en general. Así, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $c = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Nota:

Si f es derivable por la izquierda (resp. por la derecha) en c entonces f es continua por la izquierda (resp. por la derecha) en dicho punto. Por tanto, si f es derivable por la izquierda y por la derecha en c entonces f es continua en dicho punto.

Propiedades de la derivada.

1) Si f y g son derivables en un punto c , entonces $f + g$ es derivable en c y además:

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

2) Si f es derivable en un punto c y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot f$ es derivable en c y además:

$$(\alpha \cdot f)'(c) = \alpha \cdot f'(c)$$

3) Si f y g son derivables en c , entonces fg es derivable en c y además:

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

Utilizando la propiedad 3) se demuestra (por inducción) lo siguiente:

$$\text{Si } f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y como consecuencia de 1), 2) y el resultado anterior si

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 & n \in \mathbb{N} \\ \text{resulta que } P'(x) &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4) Si g es derivable en un punto c y $g(c) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en c y además:

$$(1/g)'(c) = -\frac{g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Por tanto:

$$\text{Si } f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \quad n = -1, -2, -3, \dots \Rightarrow f'(x) = -\frac{-nx^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{n-1} \quad \forall x \neq 0$$

5) Si f y g son derivables en c y $g(c) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en c y además:

$$(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Como consecuencia se deduce que las funciones racionales son derivables en todos los puntos de su dominio, es decir, en todos aquellos puntos que no anulan al denominador.

Derivadas de otras funciones.

$$* \quad \text{Si } f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h} = \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2/2}{h} + \cos(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$* \quad \text{Si } f(x) = \log_a(x) \quad a > 0 \quad a \neq 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a(e) \quad \forall x > 0$$

Si $a = e$ se obtiene la derivada del logaritmo neperiano

$$* \quad f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

Derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena.

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$ se verifica que $f \circ g$ es derivable en c y

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)$$

Otras derivadas.

$$* \quad \text{Si } f(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\text{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* \quad \text{Si } f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) =$$

$$= 1 + \text{tg}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$* \quad \text{Si } f(x) = a^x \quad a > 0 \Rightarrow \log f(x) = x \cdot \log(a) \quad \text{y aplicando la regla de la cadena}$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \log(a) \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \log(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* \quad \text{Si } f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \log(e) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio:

Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$
 b) $f(x) = e^{-|x|}$
 c) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$
 d) $f(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$; $f(x) = x^3$ si $x < 0$
 e) $f(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$

Derivada de la función inversa.

Sea f una función inyectiva y f^{-1} su función inversa. Si f es derivable en el punto $f^{-1}(c)$ con derivada distinta de cero, se verifica que f^{-1} es derivable en el punto c y además:

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

Otras derivadas.

- * Si $g(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Recuérdese que $g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- * Si $g(x) = \operatorname{arccos}(x)$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = \cos(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(g(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(g(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Recuérdese que $g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

- * Si $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = \operatorname{tg}(x)$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(g(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Recuérdese que $g : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- * Si $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ siendo $f(x) = x^n$. Por tanto

$$g'(x) = \frac{1}{n(g(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} (x^{1/n})^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n^n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\forall x \neq 0 \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad ; \quad \forall x > 0 \quad \text{si } n \text{ es par}$$

Teorema de Rolle.

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje de abscisas.

Como consecuencia de este teorema se deduce que si f es derivable en R y $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz real. Análogamente en un intervalo (a, b) .

Ejercicios:

- 1) Encontrar una función f definida en $[-1, 1]$ que no satisfaga alguna de las hipótesis del teorema de Rolle, y sin embargo verifique $f'(c) = 0$ para algún $c \in (-1, 1)$.
- 2) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$?

Como consecuencia de los teoremas de Bolzano y de Rolle se deduce:

Si f es continua en $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, f derivable en (a, b) y $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, se verifica que existe un único punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, en el intervalo (a, b) la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y solo una raíz.

Ejemplo:

La ecuación $\frac{x}{2} - \sin(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ya que la función $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$ verifica ser continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0$ y $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ puesto que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$

Ejercicio:

Demostrar que la ecuación $\sin(x) + 3x - 1$ tiene una única raíz real y encontrar un intervalo de longitud menor que dos que la contenga.

Teorema del valor medio de Lagrange.

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretación geométrica.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Por tanto el teorema del valor medio afirma que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que las tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a r .

Ejercicios.

1) Sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ si $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 1$

Estudiar si existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$. En caso afirmativo calcular tal o tales valores de c .

2) Demostrar que $\frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x$ si $x > 0$

Soluciones:

1)

f es continua en $[0, 2] - \{1\}$ ya que en este dominio f viene dada mediante funciones racionales y el denominador no se anula. Veamos que pasa en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \quad ; \quad f(1) = \frac{3-1}{2} = 1$$

Por tanto f es continua en $x = 1$ y en consecuencia lo es en $[0, 2]$.

f es derivable en $[0, 2] - \{1\}$. Veamos que pasa en $x = 1$.

$$f'(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3-(1+h)^2}{2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - h^2}{2h} = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h(1+h)} = -1$$

Por tanto f es derivable en 1 y $f'(1) = -1$

$$f'(x) = -x \quad \text{si } 0 < x < 1 \quad ; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{si } x > 1 \quad ; \quad f'(1) = -1$$

Por el teorema del valor medio $\exists c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$

$$f'(c) = -c = -1/2 \Leftrightarrow c = 1/2 \quad ; \quad f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$$

2)

Sea $f(x) = \log(1+x)$ continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$; por tanto $\exists c \in (0, x)$

$$\text{tal que } f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \text{ es decir, } \frac{1}{1+c} = \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\text{Así pues } \frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1 \quad \text{y como } x > 0 \text{ se verifica } \frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

Regla de L'Hopital.

Nos permite el cálculo de límites con indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$. Lo vamos a enunciar para los dos primeros casos ya que los demás se pueden expresar de alguna de esas dos maneras.

1) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y

$$\text{además } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = +\infty$ y existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\text{y además } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En ambos casos el resultado es igualmente válido si $c = +\infty$ ó $c = -\infty$. Si en la expresión $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la regla de L'Hopital.

Ejercicios.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right] \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} x^x \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

1.6: Polinomio de Taylor.

Derivadas sucesivas.

Dada $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en los puntos en que f sea derivable tiene sentido hablar de la función derivada

$$\begin{aligned} f' : D_1 \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & D_1 &\subset D \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Si c es un punto interior del dominio de f' , se dice que f' es derivable en c si existe y es finito el límite siguiente: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada segunda de f en el punto c , y se denota por $f''(c)$.

En los puntos en que f' sea derivable tiene sentido hablar de la función derivada segunda de f :

$$\begin{aligned} f'' : D_2 \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & D_2 &\subset D_1 \\ x &\rightarrow f''(x) \end{aligned}$$

De modo análogo se definen las derivadas tercera f''' , cuarta $f^{(4)}$, ..., y en general la derivada n -ésima $f^{(n)}$.

Si $y = f(x)$ en la notación de Leibniz:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad \dots \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Definición.

Se dice que f es de clase n en (a, b) y escribiremos $f \in C^n(a, b)$ si f es derivable hasta el orden n en todo punto de (a, b) de modo que $f^{(n)}$ es continua en (a, b) .

Se dice que f es de clase infinito en (a, b) y escribiremos $f \in C^\infty(a, b)$ si f es derivable de cualquier orden en todos los puntos de (a, b) . Así, por ejemplo, las funciones polinómicas, exponenciales, seno y coseno son de clase infinito en $\mathbb{R}$.

Ejercicio.

Obtener la función derivada segunda de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es f de clase uno en $(-1, 1)$?

Polinomios de Taylor. Fórmula de Taylor con resto.

Los polinomios de Taylor aproximan a una función en un entorno de un punto, de tal manera que coinciden con la función y con algunas de sus derivadas en dicho punto.

Sea $f \in C^{n+1}(a, b)$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces, para cada $x \in (a, b)$ $x \neq x_0$, existe un punto c comprendido entre x y x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Definición.

Al polinomio $P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se le llama *polinomio de Taylor* de orden n asociado a la función f en el punto x_0 , y se denota por $T_n(f, x_0)(x)$ o simplemente $T_n(x)$.

Se verifica: $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, $P''(x_0) = f''(x_0)$, $\dots$, $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Definición.

El término $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se llama *resto* (en la forma de Lagrange) de orden n de f en el punto x_0 y se denota $R_n(f, x_0)(x)$. Por tanto se verifica:

$$|R_n(f, x_0)(x)| = |f(x) - T_n(f, x_0)(x)|$$

que nos mide el error cometido al tomar como valor de la función en un punto el valor del polinomio en dicho punto.

Formula de Mac-Laurin.

Es la fórmula de Taylor desarrollada en el punto $x_0 = 0$, es decir,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

Ejercicio.

Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$

- Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 asociado a f en el punto $x_0 = 0$.
- Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1.02}$ utilizando un polinomio de Taylor de segundo grado y dar una cota del error cometido.

Solución.

a) $T_4(f, 0)(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = 1/2 \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -1/4$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} \Rightarrow f'''(0) = 3/8 \quad ; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -15/16$$

$$T_4(f, 0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

b)

$$T_2(f, 0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02} = f(0.02) \approx T_2(f, 0)(0.02) = 1 + \frac{1}{2}0.02 - \frac{1}{8}(0.02)^2 = 1.00995$$

$$R_2(f, 0)(0.02) = f(0.02) - T_2(f, 0)(0.02) = \sqrt{1.02} - 1.00995$$

$$R_2(f, 0)(0.02) = \frac{f'''(c)}{3!}(0.02)^3 = \frac{\frac{3}{8}(c+1)^{-5/2}}{3 \times 2}(0.02)^3 = \frac{1}{16}(c+1)^{-5/2}(0.02)^3$$

$$0 < c < 0.02 \Rightarrow 1 < c+1 < 1.02 \Rightarrow (c+1)^{5/2} > 1 \Rightarrow (c+1)^{-5/2} < 1$$

$$\text{Por tanto } |R_2(f, 0)(0.02)| = \frac{1}{16}(c+1)^{-5/2}(0.02)^3 < \frac{1}{16}(0.02)^3 = 5 \times 10^{-7}$$

Ejercicio.

Obtener la expresión general del desarrollo de Mac-Laurin de la función $f(x) = \log(x+1)$ y utilizarlo para demostrar que $\log(2) < 5/6$.

Solución.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1 \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2 \quad ; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \quad ; \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad ; \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(c+1)^{n+1}} \quad ; \quad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$$

$$\log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}}x^{n+1}, \quad c \in (0, x)$$

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(c+1)^{n+1}}, \quad c \in (0, 1)$$

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad . \text{ Por tanto, si } n = 3 \quad , \quad \log(2) = \frac{5}{6} + \frac{(-1)^3}{4(c+1)^4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4(c+1)^4}$$

$$\frac{1}{4(c+1)^4} > 0 \Rightarrow \log(2) < \frac{5}{6}$$

Ejercicio.

Utilizar un desarrollo de Mac-Laurin adecuado para calcular $\cos(1)$ con un error menor que 10^{-2}

Solución.

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f(0) = 1 & ; & & f'(x) = -\operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) = -1 & ; & & f'''(x) = \operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 1 & ; & & f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f^{(5)}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resulta : } f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x) \quad , \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(x)$$

$$\begin{aligned} T_{2n}(f,0)(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \end{aligned}$$

$$R_{2n}(f,0)(x) = \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad , \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad , \quad c \in (0, x) \quad \text{ó} \quad c \in (x, 0)$$

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(c)}{(2n+1)!} \quad , \quad c \in (0, 1)$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(c)}{(2n+1)!} \right| = \frac{|\operatorname{sen}(c)|}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 2$$

$$\text{Si } n = 2, \quad 2n = 4 \quad \text{y por tanto} \quad \cos(1) \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$$

$$\cos(1) \approx \frac{13}{24} \quad \text{con un error menor que } 10^{-2}$$

1.7: Optimización

Aplicaciones de la derivada. Estudio local de una función: Criterios de crecimiento y decrecimiento.

Teorema.

Sea f derivable en un intervalo abierto I (ó unión de intervalos abiertos).

- a) f es creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- b) f es decreciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$
- c) Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en I .
- d) Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en I .
- e) Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es constante en I .

Los recíprocos de c) y d) no son ciertos en general. Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ y sin embargo $f'(0) = 0$.

Si dos funciones definidas en un intervalo abierto tienen la misma derivada, su diferencia es una constante.

Máximos y mínimos locales

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$

Definición.

La función f presenta un máximo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \quad / \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Definición.

La función f presenta un mínimo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \quad / \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos o locales.

Definición.

La función f alcanza el máximo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Definición.

La función f alcanza el mínimo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Al máximo y mínimo absoluto se les llama extremos absolutos. Lógicamente todo extremo absoluto también es relativo.

Condición necesaria de extremo.

Sea f definida en un abierto I . Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en un punto $x_0 \in I$, entonces $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe.

Definición.

A los puntos $x_0 \in I$ tales que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe se les llama puntos críticos.

Criterio de la derivada primera (Condición suficiente de extremo).

Sea x_0 un punto crítico de f y supongamos que f es continua en x_0 . Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0 (la función pasa de creciente a decreciente). Si ambas desigualdades se invierten, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 (la función pasa de decreciente a creciente).

Ejercicio.

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 1|$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se comprueba que no es derivable} \\ \text{en } x = -1 \text{ y en } x = 1. \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \text{ ó } x < -1 \\ -2x & \text{si } x \in (-1, 1) \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

puntos críticos: $-1, 0, 1$

intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$

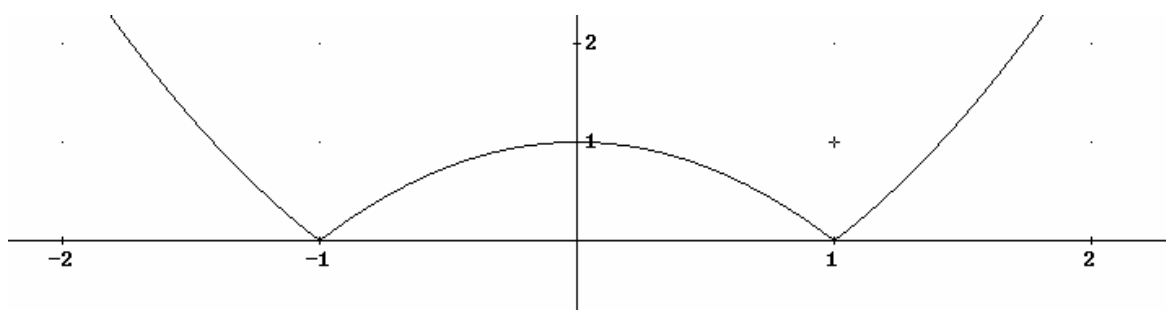
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

En $x = -1$ mínimo local; $f(-1) = 0$ mínimo local y absoluto.

En $x = 0$ máximo local; $f(0) = 1$ máximo local

En $x = 1$ mínimo local; $f(1) = 0$ mínimo local y absoluto.



$\text{Im } f = [0, \infty)$

f no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$ y por tanto no existe $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, es decir, no existe el máximo absoluto.

Criterio de la derivada enésima.

Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces, si n es par, f tiene un mínimo relativo en x_0 si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si n es impar, f no tiene extremo en x_0 .

Corolario (Criterio de la derivada segunda).

Sea $f \in C^2(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$. Si $f''(x_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en x_0 . Si $f''(x_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en x_0 .

Ejercicio.

Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = (x-3)^4 \cdot (x-1)$

Solución.

$$f'(x) = 4(x-3)^3(x-1) + (x-3)^4 = (x-3)^3(5x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 3, \quad x = 7/5$$

$$f''(x) = 3(x-3)^2(5x-7) + 5(x-3)^3 = (x-3)^2(20x-36)$$

$$f''(3) = 0 \quad ; \quad f''(7/5) < 0 \Rightarrow f(7/5) \text{ máximo relativo}$$

$$f'''(x) = 2(x-3)(20x-36) + 20(x-3)^2 = (x-3)(60x-132); \quad f'''(3) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 60x - 132 + 60(x-3) = 120x - 312$$

$$f^{(4)}(3) > 0 \Rightarrow f(3) = 0 \text{ mínimo relativo.}$$

Cálculo de extremos en intervalos cerrados: máx. y mín. en los puntos frontera.

Si el dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces la continuidad de la función garantiza la existencia tanto del máximo absoluto como del mínimo absoluto. En este caso se consideran:

- los puntos en los que f no es derivable.
- Los puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que $f'(x_0) = 0$.
- Los puntos frontera, es decir, a y b .

Para funciones definidas sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ los puntos críticos son aquellos para los que la derivada es cero o no existe. Para funciones definidas sobre un conjunto cerrado los puntos frontera se llaman también puntos críticos.

Ejercicio.

Hallar los extremos absolutos y relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ si $x \in [0, 5]$.

Solución.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

Los puntos críticos son: 0, 2 y 5.

$$f(0) = 7 \quad ; \quad f(2) = 3 \quad ; \quad f(5) = 57$$

Por tanto, $\max_{x \in [0, 5]} f(x) = 57$, $\min_{x \in [0, 5]} f(x) = 3$; $f(0) = 7$ máximo relativo en la frontera.

Ejercicio.

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje X y está inscrito en el triángulo determinado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - 2x$.

Concavidad y puntos de inflexión.

La función f es cóncava hacia arriba en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en R .

La función f es cóncava hacia abajo en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

Teorema.

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I .

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I .

Definición.

Sea $x_0 \in \text{Dom } f$; se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión $\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ tal que f es cóncava en un sentido en $(x_0 - \delta, x_0)$ y cóncava en el sentido opuesto en $(x_0, x_0 + \delta)$.

Teorema.

Se verifica que si f tiene un punto de inflexión en x_0 entonces $f''(x_0) = 0$ ó no existe $f''(x_0)$.

Teorema.

Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces si n es impar, f tiene en x_0 un punto de inflexión.

Ejercicio.

Determinar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3(x-1)$.

