

TEMA 1

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL II

- Límites de funciones.
- Continuidad de funciones.
- Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.
- Optimización.

Límites de funciones.

■ Límite finito en un punto:

- Consideremos una función f definida en las proximidades " de un punto c , aunque no necesariamente en c , es decir, $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y c punto de acumulación de D . La función f tiene límite $l \in \mathbb{R}$ en el punto c si " $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x este suficientemente próximo a c ". La definición rigurosa es la siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$x \in D$$

δ depende, en general, de ε y del punto c .

El límite es independiente de que la función este o no definida en el punto c .

Límites de funciones.

- Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \quad x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Límites de funciones.

- Límites infinitos:
 - La función f tiene límite $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) en el punto c si “ $f(x)$ se puede hacer tan grande (resp. tan pequeña) como queramos, siempre que x este suficientemente próximo a c .
Análogamente se definen los límites laterales infinitos.

Límites de funciones.

- Límite finito en el infinito:
 - La función f tiene límite l cuando la variable x tiende a $+\infty$ (res. $-\infty$) si “ $f(x)$ está tan próximo a l como queramos siempre que x sea suficientemente grande (res. pequeño) “.
- Límite infinito en el infinito:
 - De manera análoga se pueden considerar límites infinitos cuando la variable x *tiende a* $+\infty$ ó $-\infty$.

Límites de funciones.

- Se verifica:
 - Si una función tiene límite, finito o infinito, en un punto c ó en $\pm \infty$, entonces dicho límite es único.
 - Teorema de la función intermedia: Sean f , g y h tres funciones reales definidas en las “proximidades” de un punto c y supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x perteneciente a un entorno reducido de c , es decir, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) - \{c\}$. Si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$. C y l pueden ser finitos o infinitos.
 - Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno reducido de c entonces se verifica que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$

Límites de funciones.

■ Operaciones con límites de funciones:

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = m \in \mathbb{R}$ siendo $c \in \mathbb{R}$ ó $c = \pm\infty$, se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = l + m \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = l - m \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow c} [a \cdot f(x)] = a \cdot l \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = l \cdot m \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad \text{si} \quad m \neq 0$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l < 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Límites de funciones.

■ Indeterminaciones:

- $\infty - \infty$

- $\frac{0}{0}$

- $\frac{\infty}{\infty}$

- $0 \cdot \infty$

- 0^0

- 1^∞

- ∞^0

Límites de funciones.

■ Asíntotas:

- $x=a$ es una *asíntota vertical* de la función f si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

- $y=b$ es una *asíntota horizontal* de la función f si:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ y/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

En el caso de que ambos límites sean iguales a “b” la curva se “pega” a la asíntota por los dos lados (en la parte de la derecha y en la de la izquierda).

- $y=ax+b$, $a \neq 0$, una *asíntota oblicua* de la función f si:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ y/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

- a y b se determinan de la siguiente manera:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a.x], \text{ y lo mismo con el límite en } -\infty$$

Una función puede tener una asíntota horizontal y una oblicua pero no en el mismo “lado”.

Límites de funciones.

■ Infinitésimos:

- Se dice que la función es un *infinitésimo* en el punto si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$
- Sean f y g dos infinitésimos en el punto c , se dice que f es de *orden superior* a g si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ y se dice que f es de *orden inferior* a g si $\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$
- Dadas dos funciones f y g infinitésimos en el punto c se dice que f y g son *equivalentes*, cuando $x \rightarrow c$, y se denota $f \approx g$ si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Límites de funciones.

- Ejemplos de infinitésimos equivalentes:
 - Se dice que la función f es un infinitésimo en el punto $c \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

- $\text{sen}(x) \approx x \approx \text{arcsen}(x)$ si $x \rightarrow 0$

- $\text{tg}(x) \approx x \approx \text{arctg}(x)$ si $x \rightarrow 0$

- $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$ si $x \rightarrow 0$

- $\log(1+x) \approx x$ si $x \rightarrow 0$; $\log(x) \approx x-1$ si $x \rightarrow 1$

- $a^x - 1 \approx x \cdot \log(a)$ $a > 0$ si $x \rightarrow 0$; $e^x - 1 \approx x$ si $x \rightarrow 0$

Continuidad de funciones.

- Funciones continuas:

- Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. f es continua en $c \Leftrightarrow$:

- 1) $c \in D$, es decir, f está definida en c .

- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$

- 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

- Si no se verifica alguna de estas condiciones se dice que f es *discontinua en c* .

Continuidad de funciones.

- Tipos de discontinuidad:
 - Se dice que f presenta una discontinuidad evitable en el punto c si $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$, pero es distinto de $f(c)$ ó la función no está definida en c .
 - Se dice que f presenta una discontinuidad esencial en el punto c si no existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ como número real. Es de salto finito si $\exists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R}$ pero son distintos.

Continuidad de funciones.

- Continuidad lateral:

- Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. f es continua por la derecha en $c \Leftrightarrow$

- 1) $c \in D$, es decir, f está definida en c .

- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R}$

- 3) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda en c .

Se verifica que f es continua en $c \Leftrightarrow f$ es continua por la derecha y por la izquierda en c .

Continuidad de funciones.

- Continuidad de las funciones elementales:
 - La función potencial entera $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es continua en R .
 - Las funciones polinómicas son continuas en R .
 - Las funciones racionales son continuas en R excepto en los puntos que anulan al denominador.
 - La función seno y la función coseno son continuas en R .
 - La función tangente es continua en su dominio.
 - La función exponencial es continua en R .
 - La función logarítmica es continua en su dominio.

Continuidad de funciones.

- Propiedades de las funciones continuas:
 - Si f y g son continuas en un punto c , entonces las funciones $f + g$, $f - g$ y fg son también continuas en C . Si, además, $g(c) \neq 0$ entonces f / g es también continua en C .
 - Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$ entonces $f \circ g$ es continua en c .

Continuidad de funciones.

- Teorema de Bolzano:

- Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, es decir, f cambia de signo en los extremos del intervalo, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Se dice que c es raíz de la ecuación $f(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $f(c) = 0$

Continuidad de funciones.

- Teorema de Darboux(del valor intermedio):
 - Sea f continua en $[a, b]$ y " d " un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$, es decir, f alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.
- Teorema:
 - Si f es continua en $[a, b] \Rightarrow f$ está acotada en $[a, b]$, es decir, $\exists K \in \mathbb{R}^+ / |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$

Continuidad de funciones.

- Teorema de Weierstrass:
 - Si f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo (absoluto) en dicho intervalo, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a, b]$ el mínimo sería $f(x_1)$ y el máximo $f(x_2)$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Derivada de una función en un punto: interpretación geométrica.
 - Se dice que una función $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto c perteneciente al interior de D , si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

en cuyo caso, a dicho valor se le llama derivada de f en el punto c , y se denota por $f'(c)$.

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Derivadas laterales.
 - Si f está definida en un intervalo a la derecha de c , se dice que f es derivable por la derecha en C si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ se denota como } f'(c^+)$$

- Análogamente, se define la derivada por la izquierda:

$$f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Función derivada.
 - *f es derivable en un subconjunto abierto de R si lo es en todos sus puntos. Dada $f: D \subset R \rightarrow R$, en los puntos en que f sea derivable tiene sentido hablar de la función derivada*

$$\begin{array}{ccc} f' : D^* & \subset R & \longrightarrow R \\ x & & \longrightarrow f'(x) \end{array} \quad D^* \subset D$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Derivabilidad y continuidad.
 - Si f es derivable en un punto c , entonces f es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto en general. Así, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $c = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Nota:

Si f es derivable por la izquierda (resp. por la derecha) en c entonces f es continua por la izquierda (resp. por la derecha) en dicho punto. Por tanto, si f es derivable por la izquierda y por la derecha en c entonces f es continua en dicho punto.

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Propiedades de la derivada:

1) Si f y g son derivables en un punto c , entonces $f + g$ es derivable en c y además:

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

2) Si f es derivable en un punto c y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot f$ es derivable en c y además:

$$(\alpha \cdot f)'(c) = \alpha \cdot f'(c)$$

3) Si f y g son derivables en c , entonces fg es derivable en c y además:

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

$$4) \quad (f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Derivadas de funciones compuestas: regla de la cadena.
 - Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$ se verifica que $f \circ g$ es derivable en c y

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)).g'(c)$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Derivada de la función inversa:
 - Sea f una función inyectiva y f^{-1} su función inversa. Si f es derivable en el punto $f^{-1}(c)$ con derivada distinta de cero, se verifica que f^{-1} es derivable en el punto c y además:

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

■ Teorema de Rolle.

- Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje de abscisas.
- Como consecuencia de este teorema se deduce que si f es derivable en R y $f'(x) \neq 0 \forall x \in R$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz real. Análogamente en un intervalo (a, b) .

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Consecuencia de los teoremas de Bolzano y Rolle.
 - Si f es continua en $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, f derivable en (a, b) y $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, se verifica que existe un único punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, en el intervalo (a, b) la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y solo una raíz.

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Teorema del valor medio de Lagrange.
 - Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Interpretación geométrica.
 - $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por tanto el teorema del valor medio afirma que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a r .

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Regla de L'Hopital:

- Nos permite el cálculo de límites con indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$
Lo vamos a enunciar para los dos primeros casos ya que los demás se pueden expresar de alguna de esas dos maneras.

1) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
entonces también existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.

- Regla de L'Hopital:

2) Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto $c \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = +\infty$ y existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- En ambos casos el resultado es igualmente válido si $c = +\infty$ ó $c = -\infty$. Si en la expresión $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la regla de L'Hopital.

Optimización.

- *Aplicaciones de la derivada. Estudio local de una función: Criterios de crecimiento y decrecimiento.*
 - *Sea f derivable en un intervalo abierto I (ó unión de intervalos abiertos).*
 - a) *f es creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*
 - b) *f es decreciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$*
 - c) *Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en I .*
 - d) *Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en I .*
 - e) *Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es constante en I .*

Los recíprocos de c) y d) no son ciertos en general. Si dos funciones definidas en un intervalo abierto tienen la misma derivada, su diferencia es una constante.

Optimización.

■ Máximos y mínimos locales:

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$

La función f presenta un máximo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ /
 $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

La función f presenta un mínimo local (o relativo) en el punto $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ /
 $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos o locales.

La función f alcanza el máximo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

La función f alcanza el mínimo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Al máximo y mínimo absoluto se les llama extremos absolutos. Lógicamente todo extremo absoluto también es relativo.

Optimización.

- *Condición necesaria de extremo.*

Sea f definida en un abierto I . Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en un punto $x_0 \in I$, entonces $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe.

Definición.

A los puntos $x_0 \in I$ tales que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe se les llama puntos críticos.

Optimización.

- *Criterio de la derivada primera (Condición suficiente de extremo).*

Sea x_0 un punto crítico de f y supongamos que f es continua en x_0 . Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0 (la función pasa de creciente a decreciente). Si ambas desigualdades se invierten, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 (la función pasa de decreciente a creciente).

Optimización.

■ *Criterio de la derivada enésima.*

Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces, si n es par, f tiene un mínimo relativo en x_0 si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si n es impar, f no tiene extremo en x_0 .

■ *Corolario(Criterio de la derivada segunda)*

Sea $f \in C^2(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$. Si $f''(x_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en x_0 . Si $f''(x_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en x_0 .

Optimización.

- Cálculo de de extremos en intervalos cerrados: máx. y mín. en los puntos frontera:
 - Si el dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces la continuidad de la función garantiza la existencia tanto del máximo absoluto como del mínimo absoluto. En este caso se consideran:
 - a) los puntos en los que f no es derivable.
 - b) Los puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que $f'(x_0) = 0$
 - c) Los puntos frontera, es decir, a y b .
 - Para funciones definidas sobre un conjunto abierto de R los puntos críticos son aquellos para los que la derivada es cero o no existe. Para funciones definidas sobre un conjunto cerrado los puntos frontera se llaman también puntos críticos.

Optimización.

■ Concavidad:

- La función f es cóncava hacia arriba en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$. La función f es cóncava hacia abajo en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

■ Teorema:

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en I .

Si f tiene derivada segunda en I y $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en I .

Optimización.

■ Puntos de inflexión:

Sea $x_0 \in \text{Dom } f$; se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión $\Leftrightarrow: \exists \delta > 0$ tal que f es cóncava en un sentido en $(x_0 - \delta, x_0)$ y cóncava en el sentido opuesto en $(x_0, x_0 + \delta)$.

Teorema.

Se verifica que si f tiene un punto de inflexión en x_0 entonces $f''(x_0) = 0$ ó no existe $f''(x_0)$.

Teorema.

Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entonces si n es impar, f tiene en x_0 un punto de inflexión.