

TEMA 1

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL I

- Objetivos.
- Conjuntos numéricos.
- Funciones reales de una variable real.
- Límites de funciones.
- Continuidad de funciones.
- Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables.
- Polinomio de Taylor.
- Optimización.

OBJETIVOS

- Operar y representar funciones reales de variable real, obtener sus límites, determinar su continuidad, calcular derivadas y plantear y resolver problemas de optimización.

Conjuntos numéricos

- Definición.
- Método de inducción.
- Producto cartesiano.
- Intersección.
- Unión.
- Propiedades de orden en $\mathbb{R}$.
- Valor absoluto de un número real.
- Propiedades del valor absoluto.
- Conjuntos acotados.
- Intervalos acotados.
- Intervalos no acotados.

Definición

- Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman los elementos del conjunto. Para indicar que un elemento x está en el conjunto A escribimos $x \in A$ y para indicar lo contrario escribimos $x \notin A$. A menudo se representan los conjuntos mediante llaves encerrando a sus elementos. Así pues $1 \in \{-1, 0, 1, 2\}$ pero $0 \notin \{1, 2, 3\}$. De los conjuntos numéricos se definen en primer lugar los números naturales $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ con los cuales se pueden realizar las operaciones de suma y multiplicación para que el resultado siga siendo un número natural.

Método de inducción

- Se considera el conjunto $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Sea P una propiedad que puede verificar o no un número natural; expresamos que $P(n)$ es cierto si el número natural n verifica la propiedad P . Si se verifica:
 - i) $P(1)$ es cierto, es decir, el primer número natural verifica P .
 - ii) Si es cierto $P(n)$ entonces también lo es $P(n + 1)$.
- Entonces todo número natural verifica la propiedad P .

Producto cartesiano.

- $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$
- *Ejemplo:*
 - Si $A = \{0, 1\}$ $B = \{1, 2\}$
 - $A \times B = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$
 - $B \times A = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$
 - Si $A = B = [0, 1]$, $A \times B = \{(x, y) / x \in [0,1], y \in [0,1]\}$
cuadrado unidad

Intersección y unión.

- *Intersección:*

- $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$; si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

- *Unión:*

- $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$; si $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

- *Ejemplo:*

- $A = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

- $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

- $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

Propiedades de orden $\mathbb{R}$.

- o bien $a < b$, o $b < a$, o $a = b$.
- Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
- Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
- Si $a \leq b$ y $c > 0$ entonces $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$. Por tanto si $a \leq b$ entonces $-a \geq -b$.
- Si $a \leq b$, siendo a y b no nulos del mismo signo, entonces $1/a \geq 1/b$.

Valor absoluto de un número real.

- Dado un número real x el valor absoluto de x , denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera, $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$
- Otras caracterizaciones son:
 - $|x| = \max\{x, -x\}$
 - $|x| = \sqrt{x^2}$
- Interpretación geométrica:
 - $|x| = \text{distancia entre } x \text{ y } 0.$
 - $|x - c| = \text{distancia entre } x \text{ y } c.$

Propiedades de valor absoluto.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x| |y|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$
- $|x-c| \leq \delta \Leftrightarrow c - \delta \leq x \leq c + \delta$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$; $|x-y| \leq |x| + |y|$
- $|x-y| \geq |x| - |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

Conjuntos acotados.

- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado superiormente $\Leftrightarrow: \exists M \in \mathbb{R} / x \leq M \ \forall x \in A$.
 - M se denomina cota superior para A
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado inferiormente $\Leftrightarrow: \exists m \in \mathbb{R} / x \geq m \ \forall x \in A$.
 - m se denomina cota inferior para A
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado $\Leftrightarrow: \text{está acotado superior e inferiormente} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}^+ / |x| \leq K \ \forall x \in A$

Axioma del supremo(ínfimo)

- Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente. Entonces A tiene extremo superior o supremo, denotado por $\sup A$, que coincide con la menor de las cotas superiores.
- Sea A un conjunto de números reales acotado inferiormente. Entonces A tiene extremo inferior o ínfimo, denotado por $\inf A$, que coincide con la mayor de las cotas inferiores.
- Si el supremo pertenece al conjunto A se llama máximo y se denota $\max A$.
- Si el ínfimo pertenece al conjunto A se llama mínimo y se denota $\min A$.

Intervalos acotados y no acotados.

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:
 - *Intervalos acotados*
 - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ intervalo abierto
 - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ cerrado
 - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
 - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
 - *Intervalos no acotados*
 - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$
 - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$
 - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
 - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$
 - $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Funciones reales de una variable real.

- Nociones preliminares.
- Función monótona.
- Función acotada.
- Función par e impar: simetrías.
- Función periódica.
- Operaciones con funciones.
- Composición de funciones y función inversa.
- Funciones elementales.

Nociones preliminares.

- Se llama función real de variable real a toda aplicación $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un conjunto de números reales denominado dominio de la función. Designaremos por x a un elemento de D y por $y = f(x)$ a su imagen por la aplicación f .
- $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$
- $\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D, f(x) = y\} = f(D)$
- El conjunto de todos los puntos del plano $(x, f(x))$ con $x \in D$ forman la gráfica de la función f

Función monótona.

- Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, y $S \subset D$.
 - f es monótona creciente en $S \Leftrightarrow$:
$$\forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
 - f es monótona decreciente en $S \Leftrightarrow$:
$$\forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
 - f es estrictamente creciente en $S \Leftrightarrow$:
$$\forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
 - f es estrictamente decreciente en $S \Leftrightarrow$:
$$\forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Función acotada.

- Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, y $S \subset D$.
- f está acotada superiormente en $S \Leftrightarrow: \exists M \in \mathbb{R} / f(x) \leq M \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado superiormente.
- f está acotada inferiormente en $S \Leftrightarrow: \exists m \in \mathbb{R} / f(x) \geq m \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado inferiormente.
- f está acotada en $S \Leftrightarrow: f$ está acotada superiormente e inferiormente en $S \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}^+ / |f(x)| \leq K \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen $f(S) = \{f(x) / x \in S\}$ es un conjunto acotado.

Función par e impar: simetrías.

- Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-x \in D$ si $x \in D$
 - f es par $\Leftrightarrow: f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$
 - f es impar $\Leftrightarrow: f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$
- La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas y la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Ejemplos:
 - $f(x) = x^4$ es par
 - $f(x) = x^7$ es impar

Función periódica.

- Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.
 - f es periódica $\Leftrightarrow$: existe $h \in \mathbb{R}^+$ tal que
$$f(x) = f(x + h) \quad \forall x \in D$$
- El período p de una función periódica es el valor más pequeño de h que verifica la igualdad anterior.

Operaciones con funciones.

Sean f y g dos funciones reales de variable real tales que $\text{Dom } f = \text{Dom } g = D$.

- Función suma:

$f + g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = : f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$

- Función nula:

$0_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0_f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ verifica $f + 0_f = f$

- La función opuesta de f :

$-f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(-f)(x) = : -f(x) \quad \forall x \in D$
verifica $f + (-f) = 0_f$

Operaciones con funciones.

- La función producto:

$fg : D \subset R \rightarrow R$ tal que $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in D$

- La función unidad:

$1_f : R \rightarrow R$ tal que $1_f(x) = 1 \quad \forall x \in R$ verifica $f \cdot 1_f = f$

- La función recíproca de f :

$\frac{1}{f} : D_1 \subset R \rightarrow R$ tal que $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in D_1$

siendo $D_1 = \{x \in D / f(x) \neq 0\}$, verifica $f \cdot \frac{1}{f} = 1_f$

Operaciones con funciones.

- La función cociente:

$$\frac{f}{g}: D_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \left(\frac{f}{g}\right)(x) =: \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D_2$$

siendo $D_2 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

- Nota: Si $\text{Dom } f \neq \text{Dom } g$ con $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \neq \text{conjunto vacío}$, entonces:
 - $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$
 - $\text{Dom}(f / g) = (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

Composición de funciones.

- Sean dos funciones f y g tales que $\text{Im } g \cap \text{Dom } f \neq \text{conjunto vacío}$. Definimos la función “ g compuesta con f ” y se denota $f \circ g$ de la siguiente forma:
 - $(f \circ g)(x) =: f(g(x)) \quad \forall x \in \text{Dom } g / g(x) \in \text{Dom } f$
- Análogamente, si $\text{Im } f \cap \text{Dom } g \neq \text{conjunto vacío}$, se define la función “ f compuesta con g ” y se denota $g \circ f$ de la siguiente forma:
 - $(g \circ f)(x) =: g(f(x)) \quad \forall x \in \text{Dom } f / f(x) \in \text{Dom } g$
- La composición de funciones verifica la propiedad asociativa. No verifica, en general, la propiedad conmutativa. El elemento neutro de la composición es la función identidad I .

Función inversa.

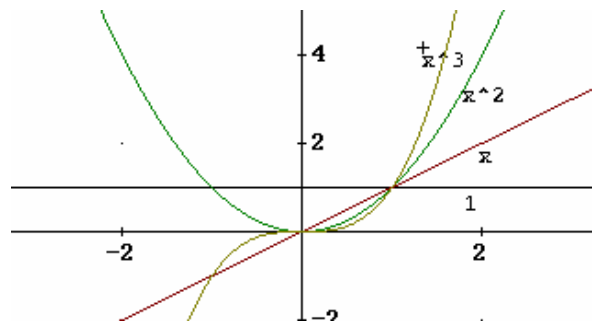
- $f : D \subset R \rightarrow R$ es inyectiva $\Leftrightarrow$:

$$\forall x_1, x_2 \in D / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Si f es una función inyectiva (en cierto dominio) entonces existe una única función g definida sobre la imagen de f , es decir, $g : \text{Im } f \rightarrow R$ tal que $f(g(x)) = x \ \forall x \in \text{Im } f = \text{Dom } g$. Así pues, $\text{Im } g = \text{Dom } f$. A esta función g se le llama inversa de la función f y se denota por f^{-1} . Por tanto
 - $f(f^{-1}(x)) = x \ \forall x \in \text{Im } f$, es decir, $f \circ f^{-1} = I$
 - Se verifica también que $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in \text{Dom } f$, es decir, $f^{-1} \circ f = I$

Funciones elementales.

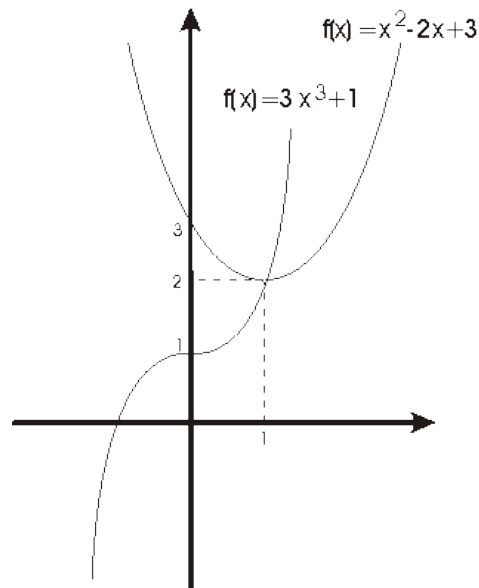
- Función potencial entera:
 - $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 - $\text{Im } f = \mathbb{R}$ si n es impar, $[0, +\infty)$ si $n > 0$ es par, $\{1\}$ si $n = 0$
 - Si n es impar entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$



Funciones elementales

- Función polinómica:

- $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n \neq 0$
- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Si $n = 1$ recta; si $n = 2$ parábola, ...



Funciones polinómicas

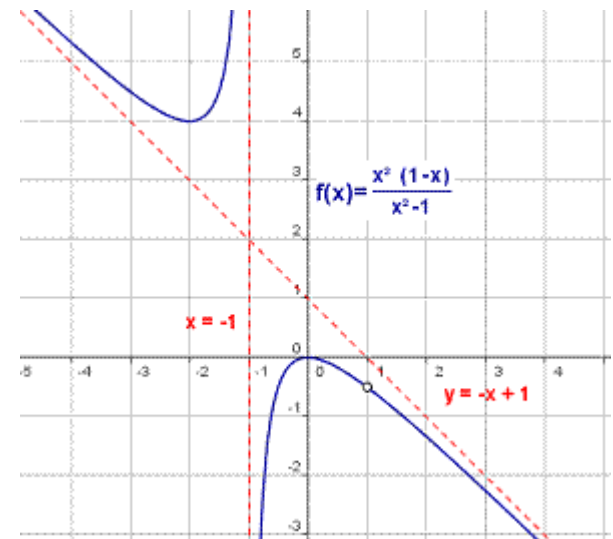
Funciones elementales

- Función racional:

- Es cociente de dos funciones polinómicas.

- $$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $Dom f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$

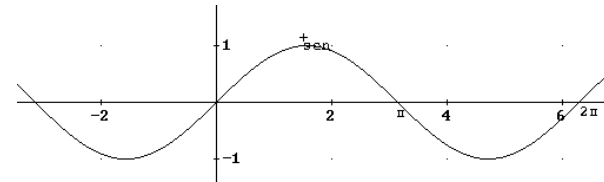


Funciones elementales

■ Funciones circulares y sus inversas.

$$f(x) = \text{sen}(x) \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$$

es acotada, impar y periódica de periodo 2π



$$f(x) = \arcsen(x)$$

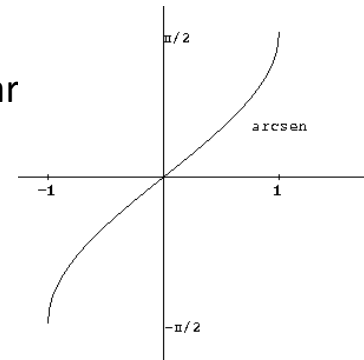
Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función seno sea inyectiva,

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

Para cada $x \in [-1, 1]$ se define $\arcsen(x)$ como el único $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}(y) = x$

$$\text{Dom} = [-1, 1] \quad \text{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

es acotada, creciente e impar



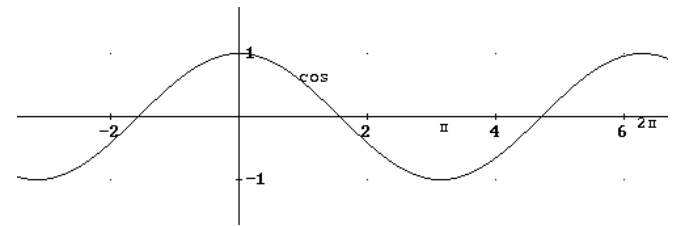
Funciones elementales.

■ Funciones circulares y sus inversas.

$$f(x) = \cos(x) \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$$

es acotada, par y periódica de periodo 2π

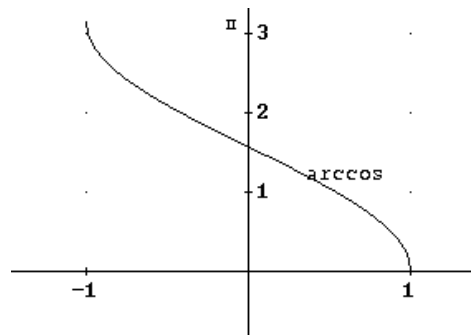
$$f(x) = \arccos(x)$$



Para definir la función inversa nos restringimos a un dominio donde la función coseno sea inyectiva,
 $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

Para cada $x \in [-1, 1]$ se define $\arccos(x)$ como el único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos(y) = x$

$\text{Dom} = [-1, 1]$ $\text{Im} = [0, \pi]$ es acotada y decreciente

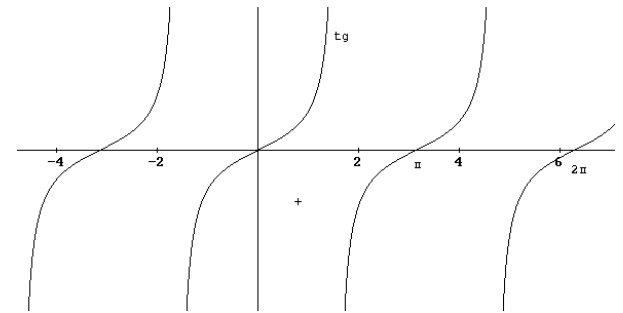


Funciones elementales.

■ Funciones circulares y sus inversas.

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{Dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$$

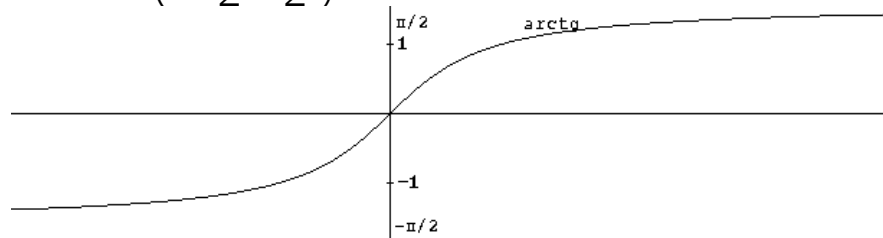


No es acotada en su dominio. Es impar y periódica de periodo π

Para cada número real x se define $\operatorname{arctg}(x)$ como el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}(y) = x$

$$\operatorname{Dom} = \mathbb{R} \quad \operatorname{Im} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

es acotada, creciente e impar



Funciones elementales.

■ Funciones elementales y sus inversas.

$$f(x) = \cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \quad ; \quad f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$f(x) = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Se verifica:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad ; \quad \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \quad ; \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad ; \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) \quad ; \quad \operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cot^2(x)$$

$$\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Funciones elementales

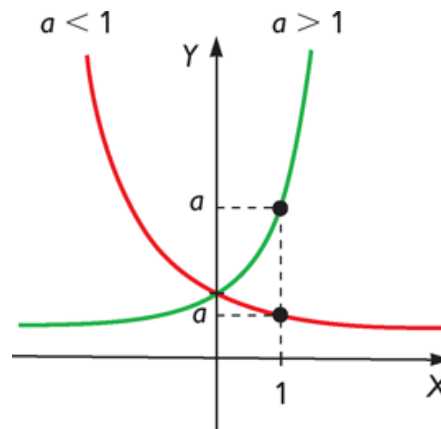
- Función exponencial:

- $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $Dom = R$; $Im = (0, \infty)$ si $a \neq 1$, $Im = \{1\}$ si $a = 1$

- Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$

- $a^0 = 1$; $a^x a^y = a^{x+y} \forall x, y \in R$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \forall x \in R$



Funciones elementales

- Función logarítmica:
 - Se llama función logarítmica de base $a > 0$ ($a \neq 1$), $f(x) = \log_a x$, a la inversa de la función exponencial.
 $Dom = (0, \infty)$; $Im = \mathbb{R}$
 - Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.
- Si $a = e$, el logaritmo se llama neperiano o natural y se representa $\log(x)$ ó $\ln(x)$. Si $a = 10$ se llama decimal.

