

PRÁCTICA 6:

Funciones de varias variables.

Gráficos, límites y derivación

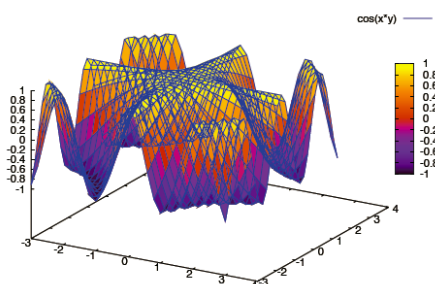
Gráficos en 3D

Con *Maxima* se pueden representar funciones de dos variables de forma similar a como hemos representado funciones de una. La principal diferencia es que vamos a utilizar el comando `plot3d` en lugar de `plot2d`, pero igual que en el caso anterior, son obligatorios la función o funciones y el dominio que tiene que ser de la forma $[a, b] \times [c, d]$.

`plot3d(f(x,y), [x,a,b], [y,c,d])` gráfica de $f(x,y)$ en $[a,b] \times [c,d]$

(%i53) `plot3d(cos(x*y), [x,-3,3], [y,-3,3]);`

(%o53)



Observación La gráfica que acabas de obtener se puede girar sin más que pinchar con el ratón sobre ella y deslizar el cursor.

Al comando `plot3d` se accede a través del menú **Gráficos→Gráficos 3D** o del botón **Gráficos 3D**. Después de esto aparece la ventana de la Figura con varios campos para rellenar:

- Expresión. La función o funciones que vayamos a dibujar.
- Variable. Hay dos campos para indicar el dominio de las dos variables.
- Cuadrícula. Indica cuántas valores se toman de cada variable para representar la función. Cuanto mayor sea, más suave será la representación a costa de aumentar la cantidad de cálculos.
- Formato. Igual que en `plot2d`, permite escoger qué programa se utiliza para representar la función. Se puede girar la gráfica en todos ellos salvo si escoges "en línea".

e) Opciones. Las comentamos a continuación.

f) Gráfico al archivo. Permite elegir un fichero donde se guardará la gráfica.

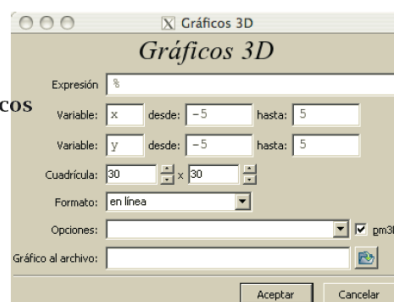


Figura Gráficos 3D

Quizá la mejor manera de ver el efecto de las opciones es repetir el dibujo anterior. La primera de ellas es "set pm3d at b" que dibuja la superficie usando una malla y en la base añade curvas de nivel (como si estuviéramos mirando la gráfica desde arriba)

Práctica 6: Funciones de varias variables. Gráficos, límites y derivación

La segunda hace varias cosas, "set pm3d at s" nos dibuja la superficie coloreada, "unset surf" elimina la malla y "unset colorbox" elimina la barra que teníamos en la derecha con la explicación de los colores y su relación con la altura (el valor de la función)

La tercera, "set pm3d map", nos dibuja un mapa de curvas de nivel con alguna ayuda adicional dada por el color

La cuarta, "set hidden3d", sólo muestra la parte de la superficie que sería visible desde nuestro punto de vista. En otras palabras, hace la superficie sólida y no transparente.

Ten en cuenta que las opciones que tiene *Gnuplot* son casi infinitas y sólo estamos comentando algunas.

Gráficos con draw

Como ya vimos en funciones de una variable, otra opción para realizar gráficos es utilizar el módulo draw. Acuérdate de cargarlo

```
(%i60) load(draw)$
```

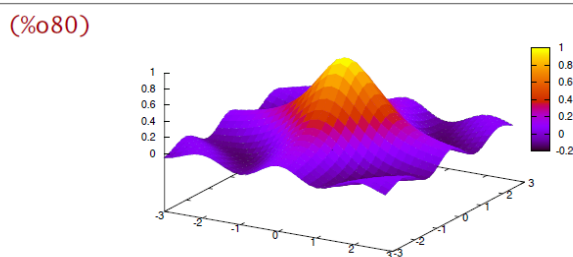
Y ahora ya podemos usar el comando draw3d

```
draw3d(opciones, objeto gráfico,...)  dibuja gráfico tres dimensional
```

De nuevo son muchas las opciones disponibles, y los tipos de objetos que pueden dibujarse, pero nosotros nos centraremos en explicit e implicit.

explicit: Usaremos `explicit(f(x,y),x,a,b,y,c,d)` para dibujar $f(x,y)$ en $[a,b] \times [c,d]$.

```
(%i80) draw3d(enhanced3d=true,  
             surface_hide=true,  
             explicit((1+x^2+y^2)^(-1)*cos(x*y),x,-3,3,y,-3,3));
```



En el gráfico anterior hemos usado las opciones:

enhanced3d: si vale true se colorean las superficies en gráficos tridimensionales.

surface_hide: cuando vale true no se dibuja la parte no visible de las superficies.

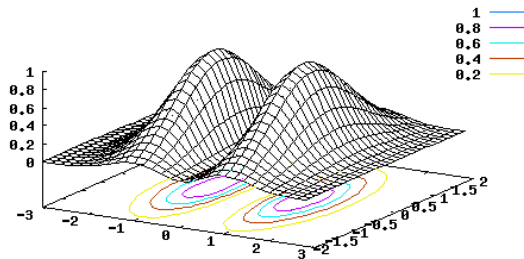
También es interesante la opción **contour**.

contour nos permite dibujar o no las curvas de nivel de una superficie. Por defecto no se muestran (none) pero también podemos dibujarlas sobre el plano XY con base sobre la propia superficie con **surface**

las dos posibilidades anteriores se pueden usar a la vez con **both**

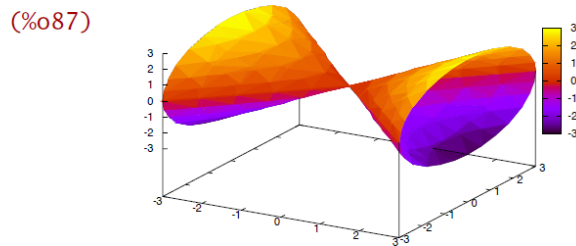
o, simplemente, podemos dibujar las curvas de nivel vistas desde arriba con `map`

```
(%i44) wxdraw3d(surface_hide=true,  
               contour=base,explicit(x^2*exp(1-x^2-0.5*y^2),x,-3,3,y,-2,2));
```



implicit: nos permite dibujar el lugar de los puntos que verifican una ecuación en tres dimensiones. Además de la ecuación debemos indicar los intervalos dónde pueden tomar valores las variables.

```
(%i87) draw3d(  
        surface_hide=true,  
        enhanced3d=true,  
        implicit(x^2-y^2=z^2,x,-3,3,y,-3,3,z,-3,3));
```



Límites y Continuidad

En los siguientes ejemplos veremos cómo combinar el análisis gráfico y la teoría de los límites radiales y/o direccionales para comprobar la continuidad de funciones de dos variables.

Comenzaremos utilizando el comando **plot3d** o **draw3d** para una primera visualización de su gráfica.

Observaremos las cercanías del origen. Acuérdate que puedes girar la gráfica para verla mejor. Esto nos da una primera impresión sobre la continuidad de la función en dicho punto.

A continuación, mediante el comando **contour_plot** o la opción **contour** de **draw3d** representamos las curvas de nivel de la función. Recuerda que en una función continua las curvas de nivel nunca se cruzan.

Finalmente, estudiamos la continuidad de la función en el origen tomando límites radiales o límites direccionales.

- Si los límites radiales no existen o dependen de m , podemos asegurar que la función no es continua, al no existir el límite.
- Consideraciones análogas podemos decir de los direccionales.
- También podemos recurrir a probar ciertas trayectorias particulares.
- Por último, en los casos dudosos, deberemos recurrir al criterio de la función mayorante para asegurar nuestro candidato a límite.

Derivadas Parciales

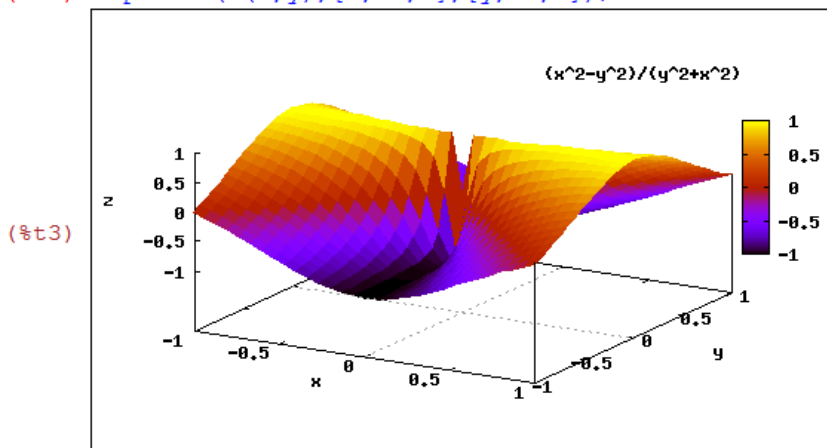
En cuanto a la existencia de derivadas parciales tan sólo debemos aplicar la definición.

Ejemplo. Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales en el origen de la función $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$; $f(0,0)=0$.

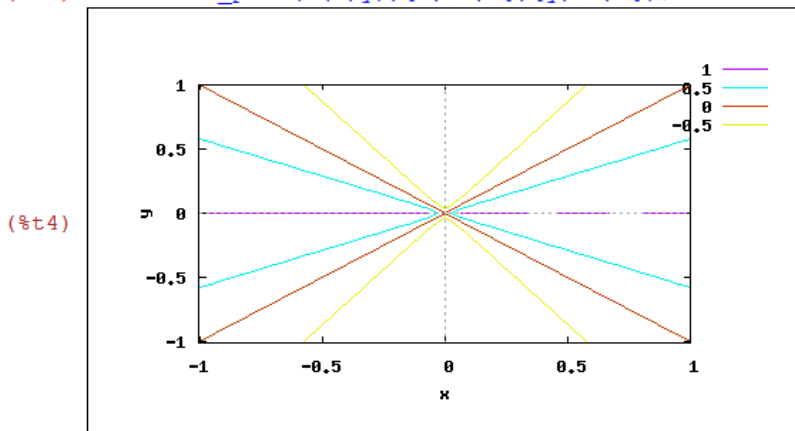
```
(%i1) f(x,y):=(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

```
(%o1) f(x,y):=  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 
```

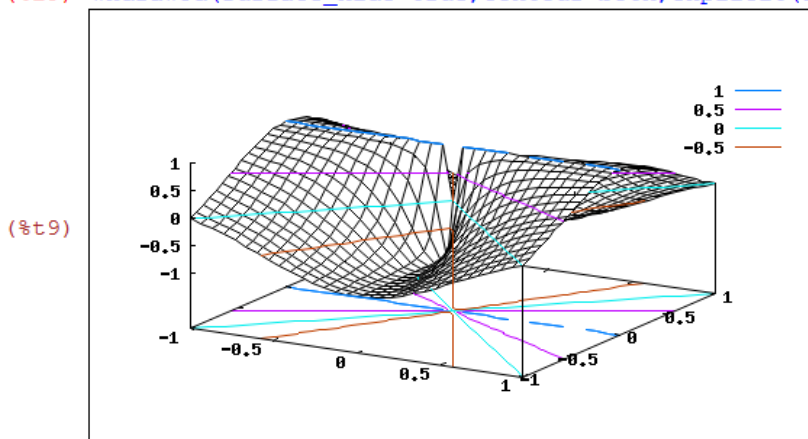
```
(%i3) wxplot3d(f(x,y),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```



```
(%i4) wxcontour_plot(f(x,y),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```



```
(%i9) wxdraw3d(surface_hide=true,contour=both,explicit(f(x,y),x,-1,1,y,-1,1));
```



Límites radiales:

```
(%i2) limit(f(x,m*x),x,0);
```

```
(%o2) 
$$\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

```

No es continua en el origen, pues los límites radiales dependen de m . Calculamos ahora las derivadas parciales en el origen.

```
(%i3) limit((f(h,0)-0)/h,h,0);
```

```
(%o3) infinity
```

```
(%i4) limit((f(0,k)-0)/k,k,0);
```

```
(%o4) infinity
```

Por tanto no tiene derivadas parciales en el origen.

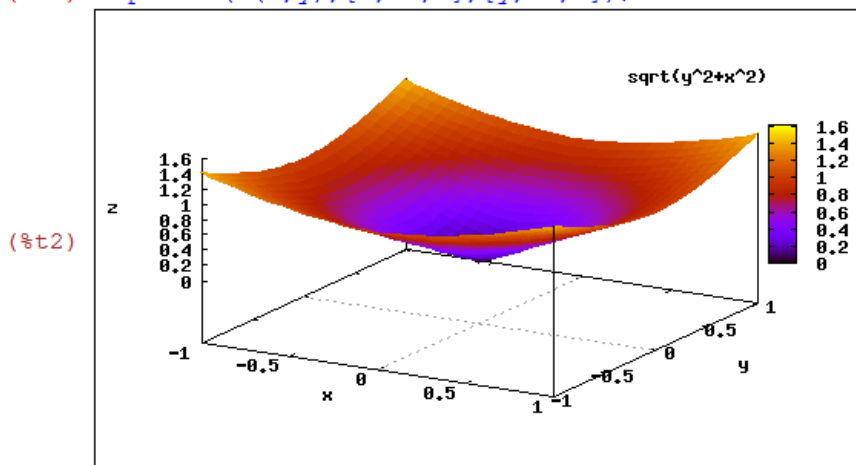
Ejemplo. Estudiar la continuidad y derivabilidad en el origen de la función $f(x,y)=(x^2+y^2)/\sqrt{x^2+y^2}$; $f(0,0)=0$

```
(%i1) f(x,y):=(x^2+y^2)/sqrt(x^2+y^2);
```

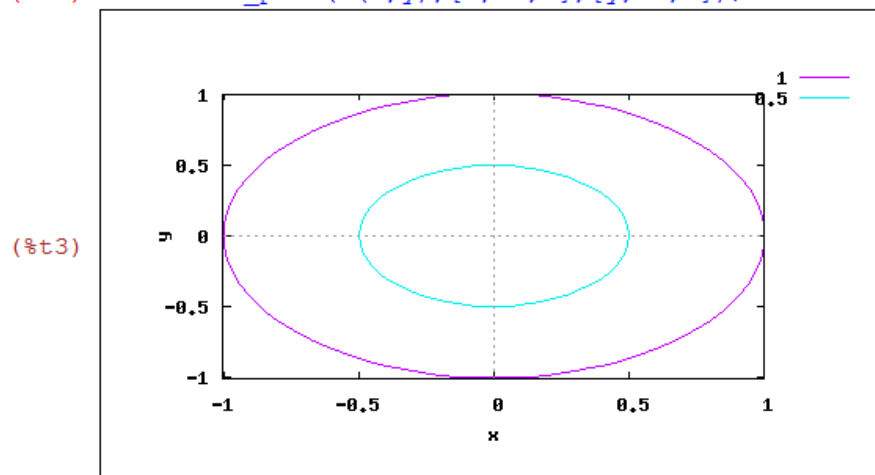
```
(%o1) 
$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

```

```
(%i2) wxplot3d(f(x,y),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```

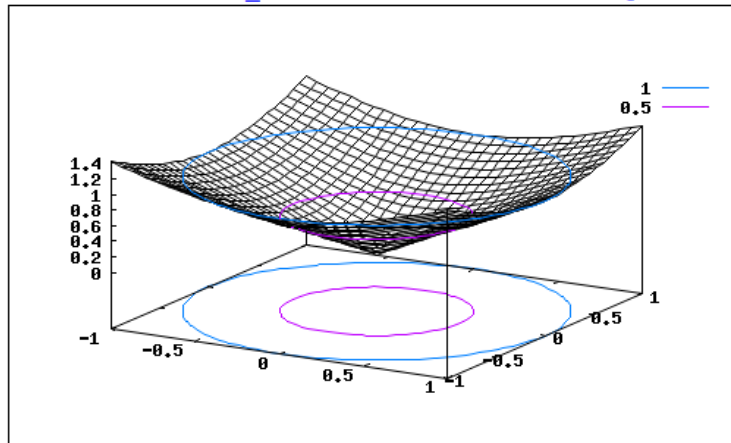


```
(%i3) wxcontour_plot(f(x,y),[x,-1,1],[y,-1,1]);
```



```
(%i4) wxdraw3d(surface_hide=true,contour=both,explicit(f(x,y),x,-1,1,y,-1,1));
```

```
(%t4)
```



Calculamos los límites radiales:

```
(%i6) limit(f(x,m*x),x,0);
(%o6) 0
```

Los límites radiales no dependen de m . Por tanto el candidato a límite es 0.

Calculamos también los límites direccionales:

```
(%i8) limit(f(r*cos(t),r*sin(t)),r,0);
(%o8) 0
```

y aplicamos el criterio de la función mayorante. Para ello es muy útil la orden **trigsimp** que permite simplificar las expresiones trigonométricas.

<code>trigsimp(expresion)</code>	simplifica funciones trigonométricas e hiperbólicas
----------------------------------	--

```
(%i9) z:trigsimp(f(r*cos(t),r*sin(t)));
(%o9) |r|
```

Observar que en este ejemplo no hace falta acotar el ángulo t y por tanto ya tenemos la función mayorante. Calculamos de ella el límite

```
(%i9) limit(z,r,0);
(%o9) 0
```

Por tanto el límite es 0, como intuíamos por las figuras.

Finalizamos calculando las derivadas parciales.

```
(%i15) (f(h,0)-0)/h;
```

```
(%o15)  $\frac{|h|}{h}$ 
```

```
(%i14) limit((f(h,0)-0)/h,h,0,plus);
```

```
(%o14) 1
```

```
(%i12) limit((f(h,0)-0)/h,h,0,minu);
```

```
(%o12) -1
```

```
(%i16) (f(0,k)-0)/k;  
(%o16)  $\frac{|k|}{k}$   
  
(%i17) limit((f(0,k)-0)/k,k,0,plus);  
(%o17) 1  
  
(%i18) limit((f(0,k)-0)/k,k,0,minus);  
(%o18) -1
```

No tiene derivadas parciales: es un pico o punto anguloso.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Representar gráficamente y estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de la función:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3 + y^3} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$

2) Representar gráficamente y estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$

3) Representar gráficamente y estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de la función:

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 1$$

4) Representar gráficamente y estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de la función:

$$f(x, y) = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$