

TEMA 2: Cálculo Integral en una variable

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Curso 2010-2011

Definiciones

► Función primitiva

Decimos que la función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x)$$

para todo punto x del dominio de f .

► Función integral indefinida

Dada la función f , se llama función integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas. Se suele escribir

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

con C constante arbitraria, y F una primitiva cualquiera de f .

Integrales inmediatas

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int p^x dx = \frac{p^x}{\ln p} + C, \quad p > 0, \quad p \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Integrales inmediatas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

Propiedades

► Linealidad de la integral

Dadas dos funciones f y g que admiten primitiva y una constante $k \in \mathbb{R}$ se verifica

$$i) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$ii) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

► Propiedad

Dada una función $f(x)$ que admite primitiva y dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\text{Si } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$$

$$\text{Si } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(x+b) dx = F(x+b) + C$$

Técnicas generales de integración

- ▶ **Cambio de variable**
- ▶ **Integración por partes**
- ▶ **Fórmulas de reducción**
- ▶ **Integrales de funciones racionales**
- ▶ **Integración de funciones reducibles a racionales**
- ▶ **Integración de funciones trigonométricas**
- ▶ **Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas**

Cambio de variable

Sea $\varphi(t)$ una función con derivada $\varphi'(t)$ continua y que admite inversa, y sea $f(x)$ una función continua. Entonces, haciendo $x = \varphi(t)$, se tiene

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int f(x) dx$$

Una vez resuelta la integral en la nueva variable (la cual se supone más sencilla) debe deshacerse el cambio realizado.

Integración por partes

Dadas dos funciones derivables u y v se verifica

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Como "regla" general la integración por partes es recomendada para integrales de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{polinomio} & \cdot \quad \text{función logarítmica} \\ \text{polinomio} & \cdot \quad \text{función trigonométrica inversa} \\ dv & \quad \quad \quad u \end{array}$$

y también de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{polinomio} & \cdot \quad \text{función exponencial} \\ \text{polinomio} & \cdot \quad \text{función trigonométrica} \\ u & \quad \quad \quad dv \end{array}$$

Fórmulas de reducción

Sea I_n una integral indefinida que depende de un número natural n . Se denomina *fórmula de reducción* a una relación recurrente del tipo

$$f(I_n, I_{n+1}, \dots, I_{n+p}, n, x) = 0$$

En la mayoría de los casos prácticos la relación recurrente es del tipo

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n)$$

con lo que nos basta conocer una integral para obtener las siguientes.

- Para obtener la fórmula de recurrencia se suele utilizar integración por partes.

Integrales de funciones racionales

Función racional expresada como cociente (fracción simplificada y propia) de dos polinomios

$$\frac{Q(x)}{f(x)}$$

- **Método: Descomposición en fracciones simples según las raíces del denominador**

$$f(x) = 0$$

A cada:

1) Raíz real simple a
le corresponde una fracción:

$$\frac{A}{(x - a)}$$

Integrales de funciones racionales

A cada:

2) Raíz real múltiple a de orden n

le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-a)}$$

3) Par de raíces complejas conjugadas simples

le corresponde una fracción:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

4) Par de raíces complejas conjugadas múltiples de orden n

le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n x + B_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q}$$

Integrales de funciones racionales

Primitivas de las fracciones simples

$$\textbf{Tipo 1)} \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$$

$$\textbf{Tipo 2)} \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1$$

$$\textbf{Tipo 3)} \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + C$$

$$\int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx = \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x-r)^2+s^2} dx = \frac{B-\frac{Ap}{2}}{s} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-r}{s} \right) + C$$

Integración de funciones reducibles a racionales

Integrales del tipo

$$\int R(f(x))dx$$

con R una función racional y f una función cuya inversa tiene derivada racional.

- Para este tipo de funciones, el cambio de variable

$$f(x) = t$$

transforma la integral en racional.

Integración de funciones trigonométricas

Integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$$

con R función racional.

► **Cambio universal**

Se pueden reducir siempre a una integral racional con el cambio de variable

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Integración de funciones trigonométricas

► Cambios Alternativos

Si R es una función

Cambio:

i) impar en $\sin x$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$$\cos x = t$$

ii) impar en $\cos x$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$$\sin x = t$$

iii) par en $\sin x$ y $\cos x$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

Integración de funciones trigonométrica

► Métodos Alternativos

iv) Las integrales

$$\int \sin ax \cos bxdx; \int \sin ax \sin bxdx; \int \cos ax \cos bxdx$$

se transforman en integrales inmediatas mediante las fórmulas

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A - B) + \sin(A + b)$$

v) Las integrales del tipo

$$\int \sin^n x dx; \int \cos^n x dx$$

siendo n un exponente positivo y par, se simplifican mediante las fórmulas

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas

Las integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx \text{ y } \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

con R función racional se pueden reducir a alguno de los tipos analizados anteriormente mediante los siguientes cambios de variable:

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \sin t$ ó $x = a \cos t$

$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \operatorname{tg} t$ ó $x = a \operatorname{sh} t$

$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \sec t$ ó $x = a \operatorname{ch} t$

Definición de la integral de Riemann

Sea $y = f(x)$ una función acotada en un intervalo $[a, b]$.

► Partición

Se llama *partición del intervalo cerrado* $[a, b]$ a todo conjunto *finito*

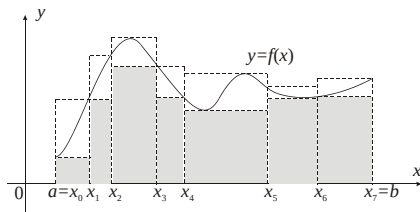
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

Supongamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Efectuamos una partición P_1 en n intervalos parciales. Sea m_i el ínfimo de f y M_i el supremo de f en cada intervalo. Se denominan *suma inferior* y *suma superior* correspondiente a la partición P_1 a:

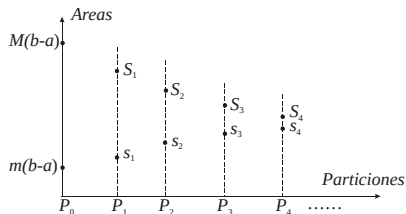
$$s_1(P_1) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$S_1(P_1) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Definición de la integral de Riemann



Suma inferior y suma superior.



Sucesión de sumas.

Repetimos indefinidamente este proceso con particiones $P_3, P_4, \dots$ cada vez más finas.

Definición de la integral de Riemann

► Función integrable en el sentido de Riemann

Cuando

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$$

se dice que la función $y = f(x)$ es integrable (en el sentido Riemann) en el intervalo $[a, b]$.

A dicho valor común $s = S$ se le denomina *integral definida* según Riemann y se le representa por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Definición de la integral de Riemann

- ▶ Otra forma de imponer la condición de integrabilidad.
Consideremos una partición P_1 en n intervalos parciales. Tomemos en cada subintervalo un punto intermedio $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y formemos la denominada *suma de Riemann*

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

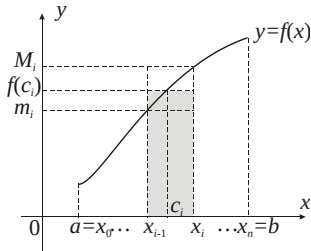
Repitiendo de nuevo este proceso con particiones cada vez más finas, de forma que n tienda hacia ∞ , la integrabilidad de la función se basa en la existencia de límite de la sucesión de sumas de Riemann.

Definición de la integral de Riemann

► Función integrable en el sentido de Riemann

La función $y = f(x)$, acotada en el intervalo $[a, b]$, es integrable (en el sentido Riemann) en dicho intervalo cuando, para cualquier sucesión de particiones con $n \rightarrow \infty$ y cualesquiera que sean los puntos c_i elegidos, existe un mismo límite para la sucesión de sumas de Riemann. Este límite es la integral definida.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

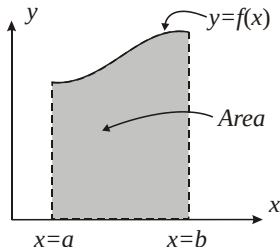


Interpretación geométrica de la integral definida

Si $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, el valor

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

representa el área A encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a, x = b$.



Funciones Integrables

- ▶ *Toda función $y = f(x)$ monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable en el mismo.*
- ▶ *Toda función continua en un intervalo cerrado es integrable en el mismo.*

Propiedades de la integral definida

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$, la función $f(x) + g(x)$ es también integrable en dicho intervalo, verificándose

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, la función $K \cdot f(x)$ es integrable en dicho intervalo y se verifica

$$\int_a^b Kf(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

Propiedades de la integral definida

- ▶ Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, $|f(x)|$ también lo es.
- ▶ Si $f(x)$ es integrable se verifican las siguientes expresiones

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt; \quad \int_a^a f(x) dx = 0; \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- ▶ Si $f(x)$ es integrable, cualesquiera que sean a, b y c , se verifica

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Propiedades de la integral definida

- ▶ Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- ▶ Si $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- ▶ Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, se verifica

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Propiedades de la integral definida

► Valor medio

Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de dicha función en ese intervalo $[a, b]$ al número real dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

► Primer teorema del valor medio

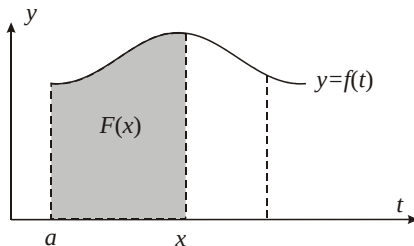
Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ existe algún punto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teoremas Fundamentales del Cálculo

- La integral como función de su límite superior.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



Teoremas Fundamentales del Cálculo

► Primer teorema fundamental del cálculo

Sea $f(t)$ una función acotada e integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$. En estas condiciones, la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

en donde $x \in [a, b]$, es continua en $[a, b]$.

Asímismo, si $f(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(x)$ es derivable en dicho intervalo, verificándose que

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Teoremas Fundamentales del Cálculo

► Segundo teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow

Sea $f(x)$ una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que existe alguna función $F(x)$ continua para la que en dicho intervalo se verifique

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

En estas condiciones

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de integrales definidas

► Integración por partes

Dadas dos funciones con derivada continua $u(x)$ y $v(x)$, $\forall x \in [a, b]$ se verifica

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

► Cambio de variable

Sea $\varphi(t)$ una función con derivada $\varphi'(t)$ continua $\forall t \in [a, b]$ y que admite inversa, y sea $f(x)$ una función continua $\forall x \in [\varphi(a), \varphi(b)]$. Entonces, haciendo $x = \varphi(t)$, se tiene

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Integrales Impropias

► Definición

Se dice que la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

es una integral impropia, si el intervalo de integración $[a, b]$ es infinito, o bien cuando la función subintegral $f(x)$ no está acotada en algún o algunos puntos de dicho intervalo.

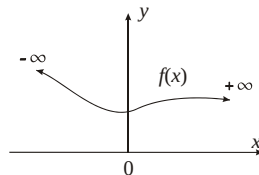
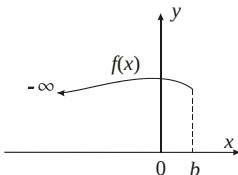
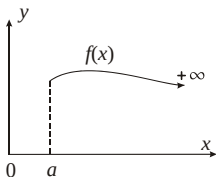
Integrales Impropias de Primera especie

► Definición

Dada una integral impropia, diremos que es de primera especie si tiene infinito en su intervalo de integración y la función subintegral $f(x)$ está acotada en dicho intervalo. Por consiguiente

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

son las tres formas en que pueden presentarse estas integrales.



Integrales Impropias de Primera especie

► Definición

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$I = \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^c f(x) dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_c^M f(x) dx
 \end{aligned}$$

La integral I es: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Convergente, si existe el límite y éste es finito} \\ \text{Divergente, cuando el límite es infinito} \\ \text{Oscilante, si no existe dicho límite} \end{array} \right.$

Primera especie. Criterio de Convergencia

Sea la integral impropia de primera especie

$$I = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

con $f(x)$ acotada y no negativa en $[a, \infty)$.

Proposition

► Criterio del Límite

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^\lambda} = \begin{cases} K \text{ finito (puede ser 0)} & \text{con } \lambda > 1 \implies I \text{ es convergente} \\ K \neq 0 \text{ (puede ser } \infty) & \text{con } \lambda \leq 1 \implies I \text{ es divergente} \end{cases}$$

Integrales Impropias de Segunda especie

► Definición

Se dice que una integral impropia lo es de segunda especie si la función subintegral $f(x)$ no está acotada en algún o algunos puntos de su intervalo de integración. Casos:

1. $f(x)$ no acotada en el extremo superior b del intervalo.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

2. $f(x)$ no acotada en el extremo inferior a del intervalo.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

3. $f(x)$ no acotada en ambos extremos.

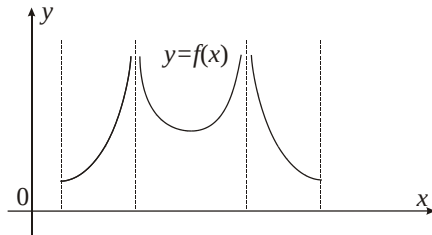
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx$$

Integrales Impropias de Segunda especie

► Definición

4. $f(x)$ no acotada en un punto intermedio $c \in (a, b)$.

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$



La integral I es: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Convergente, si existe el límite y éste es finito} \\ \text{Divergente, cuando el límite es infinito} \\ \text{Oscilante, si no existe dicho límite} \end{array} \right.$

Segunda especie. Criterio de Convergencia

Sea la integral impropia de segunda especie

$$I = \int_a^b f(x) dx, \text{ con } f(b) = \infty \text{ o } f(a) = \infty$$

► Criterio del Límite

Sea I cualquiera de los límites

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\lambda}} \text{ (cuando } f(b) = \infty \text{)}; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^\lambda}} \text{ (cuando } f(a) = \infty \text{)}$$

$$\text{Si } I = \begin{cases} K \text{ finito (puede ser 0)} & \text{con } \lambda < 1 \implies I \text{ es convergente} \\ K \neq 0 \text{ (puede ser } \infty \text{)} & \text{con } \lambda \geq 1 \implies I \text{ es divergente} \end{cases}$$

Integrales Paramétricas

► Definición

Las integrales de la forma

$$\int_a^b (f(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots)) dx$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ son parámetros que permanecen constantes durante la integración, pudiendo a su vez los extremos a y b depender o no de dichos parámetros, reciben el nombre de integrales paramétricas.

Nuestro estudio se limitará a integrales dependientes de un parámetro λ , las cuales denotaremos por

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

Integrales Paramétricas

► Ejemplo. Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para $t > 0$. Si converge la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

decimos que $f(t)$ admite transformada de Laplace y se denota por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Integrales Paramétricas

► Ejemplo. Función Γ de Euler

Se denomina función Γ de Euler a la integral impropia

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0$$

y recibe también el nombre de integral de Euler de primera especie. Se demuestra que la integral impropia es convergente para todo $p > 0$.

Propiedades de la Función Γ de Euler

$$\begin{aligned} a) \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ b) \Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}, \quad 0 < p < 1 \\ c) \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p), \quad p > 0 \end{aligned}$$

Integrales Paramétricas

► Ejemplo. Función B de Euler

Se denomina función B de Euler a la integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0$$

y recibe también el nombre de integral de Euler de segunda especie. Se demuestra que la integral impropia es convergente para todo $p, q > 0$.

Propiedades de la Función B de Euler

$$a) \quad B(p, q) = B(q, p), \quad \forall p, q > 0$$

$$b) \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx, \quad \forall p, q > 0$$

$$c) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0$$

Integrales Paramétricas. Propiedades

► Continuidad

Si la función $f(x, \lambda)$ es continua en la bola cerrada

$$B = \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq \lambda \leq d \right\}$$

entonces la función $I(\lambda)$ es continua $\forall \lambda \in (c, d)$.

► Derivabilidad

Caso a) Caso en que los extremos a y b no dependen del parámetro

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx \implies \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b f'_\lambda(x, \lambda) dx$$

Caso b) Caso en que los extremos a y b dependan del parámetro

$$\frac{dI(\lambda, a, b)}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x, \lambda) dx + f(b, \lambda) \frac{db}{d\lambda} - f(a, \lambda) \frac{da}{d\lambda}$$

Aplicaciones de la Derivación Paramétrica

La derivación bajo el signo integral permite en muchas ocasiones calcular integrales que dependen de un parámetro. Sea la integral paramétrica

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

cuya resolución directa se considera complicada. Mediante derivación

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = h(\lambda)$$

$$dI(\lambda) = h(\lambda)d\lambda \Rightarrow I(\lambda) = \int h(\lambda)d\lambda$$

integral ésta que puede ser mucho más sencilla que la dada y de cuya relación se tendrá

$$I(\lambda) = \int h(\lambda)d\lambda = H(\lambda) + C$$

Para hallar C basta conocer la integral dada por algún valor de λ .

$$I(\lambda_0) = H(\lambda_0) + C \Rightarrow C = I(\lambda_0) - H(\lambda_0)$$

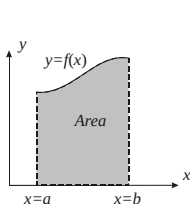
Áreas planas

Si $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$

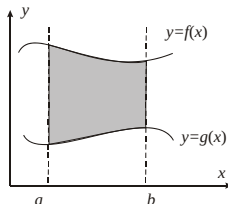
(a) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$: $A = \int_a^b f(x) dx$

(b) Área entre dos curvas $y = f(x), y = g(x)$: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

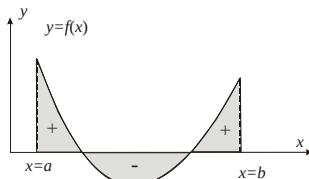
(c) Si $f(x)$ cambia de signo en $[a, b]$: $A = \int_a^b |f(x)| dx$



(a)



(b)



(c)

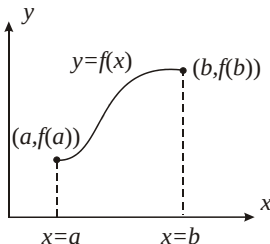
Nota: Para que el área sea positiva el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.

Longitud de un arco de curva

Si $y = f(x)$ es una curva con $f'(x)$ continua $\forall x \in [a, b]$, el valor

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

representa la longitud del arco de curva $y = f(x)$ limitada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



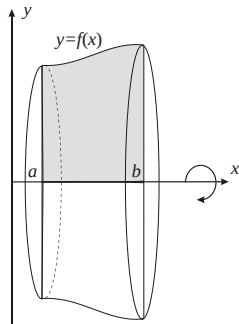
Nota: Para que la longitud sea positiva el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.

Áreas y Volúmenes de cuerpos de revolución

Consideremos el cuerpo de revolución engendrado por el trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$, $x = b$ al girar alrededor del eje Ox .

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Nota: Para que el área y el volumen sean positivos el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.