

TEMA 1: Cálculo Diferencial de una variable

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Curso 2010-2011

Los números Naturales

► Los números Naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

► Principio de inducción

Supongamos que n es un elemento perteneciente al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y que P es una propiedad que puede verificar o no n . Si se cumple que

i) se verifica $P(1)$

ii) si se verifica $P(n)$ entonces se verifica $P(n + 1)$

entonces todo número natural verifica la propiedad P .

Conjuntos Numéricos

- ▶ **Los números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- ▶ **Los números Racionales $\mathbb{Q}$**

$$\frac{m}{n} \text{ en donde } m \text{ y } n \text{ son números enteros, siendo } n \neq 0$$

- ▶ **Los números Reales $\mathbb{R}$**

Valor absoluto de un número real

► Definición

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

► Propiedades del valor absoluto

$$1) |x| \geq 0; |x| = 0 \iff x = 0$$

$$2) |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$$

$$3) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$4) |x - y| \geq ||x| - |y||$$

$$5) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$6) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ si } y \neq 0$$

Topología

► Intervalos en $\mathbb{R}$

Intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Intervalo semiabierto $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Intervalo semiabierto $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

► Entorno en $\mathbb{R}$

Dado un número real x , se llama entorno de x a todo intervalo abierto de la forma $U(x) = (x - r, x + r)$, con $r > 0$.

► Conjunto abierto

► Conjunto cerrado

► Punto interior, punto exterior y punto frontera

► Punto adherente y punto de acumulación

Definiciones básicas

► Función real de variable real

Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir a cada $x \in A$ le corresponde un valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

► Dominio e imagen

Sea f una función real de variable real. El dominio f , que se representa $\text{Dom } f$, es el conjunto de números reales x para los cuales está definida $f(x)$. Si $\text{Dom } f = A$, representaremos la función de la forma

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

La imagen de f , denotada por $\text{Im } f$, es el conjunto de valores de la función $y = f(x)$.

Definiciones básicas

► Función creciente y decreciente

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, y $B \subset A$.

i) f es creciente en B si $\forall x_1, x_2 \in B$ con $x_1 < x_2$ es $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(Si $f(x_1) < f(x_2)$, f es estrictamente creciente).

ii) f es decreciente si $\forall x_1, x_2 \in B$ con $x_1 < x_2$ es $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(Si $f(x_1) > f(x_2)$, f es estrictamente decreciente).

► Función acotada

Una función real de variable real $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para todo $x \in A$. De manera análoga se definen las funciones acotadas inferiormente.

Una función f es acotada si lo es superior e inferiormente, o lo que es equivalente, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.

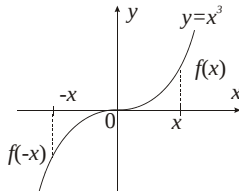
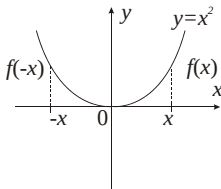
Definiciones básicas

► Función par e impar

Sea f una función definida en un dominio $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-x \in A$ si $x \in A$.

i) f es par si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

ii) f es impar si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.



La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY . La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

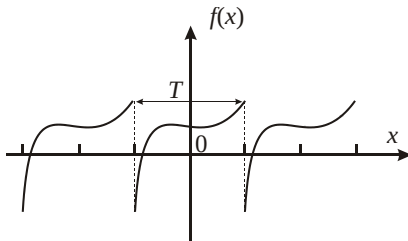
Definiciones básicas

► Función periódica

Una función f es periódica si existe $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tal que

$$f(x) = f(x + h), \forall x \in \text{Dom } f$$

El periodo T de una función f es el mínimo valor h con la propiedad anterior.



Definiciones básicas

► Extremos Relativos y Absolutos

Sea f una función definida en dominio $A \in \mathbb{R}$.

a) f tiene un máximo relativo en $x_0 \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

b) f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

c) f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in A$ si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A$.

d) f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in A$ si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A$.

Definiciones básicas

► Composición de funciones

Dadas dos funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $f(A) \subset B$, se define la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$g \circ f(x) = g[f(x)], \forall x \in A$$

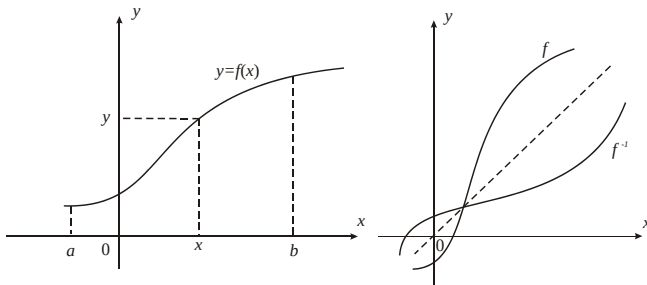
► Función inversa

Si f es una función inyectiva entonces existe una única función g definida sobre la imagen de f , es decir $g : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$, que verifica $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \text{Dom } f$. Esta función se denomina inversa de f y se denota por $g = f^{-1}$.

Definiciones básicas

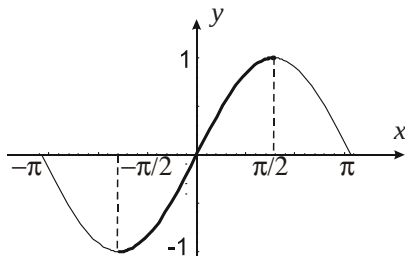
► Función inversa

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

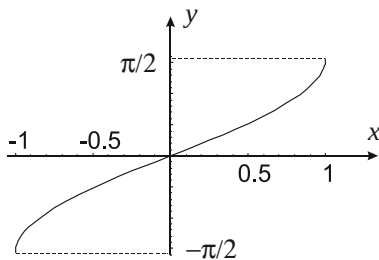


Función inyectiva. Gráficas de funciones inversas.

Funciones trigonométricas y sus inversas



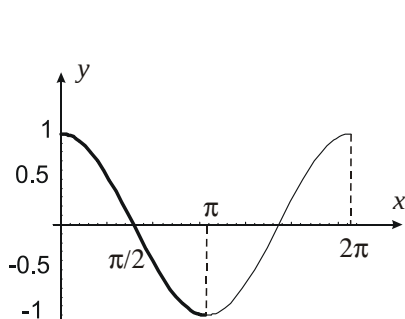
(a)



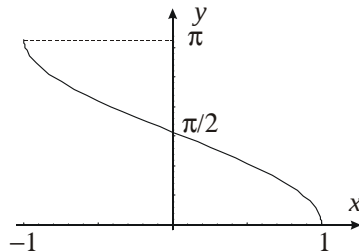
(b)

(a) $y = \sin x$. (b) $y = \arcsin x$.

Funciones trigonométricas y sus inversas



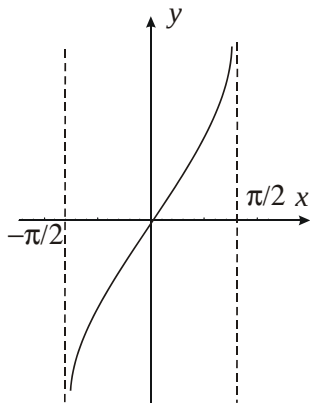
(a)



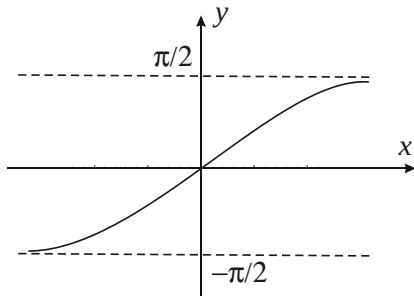
(b)

(a) $y = \cos x$. (b) $y = \arccos x$.

Funciones trigonométricas y sus inversas



(a)



(b)

(a) $y = \operatorname{tg} x$. (b) $y = \operatorname{arctg} x$.

Relaciones trigonométricas básicas

$$a) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$b) \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$c) \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$d) \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$a') 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$b') \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$c') \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$d') \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$e) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$f) \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$g) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$h) \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

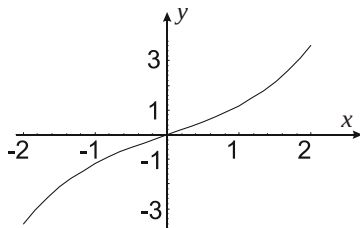
$$i) \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$j) \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

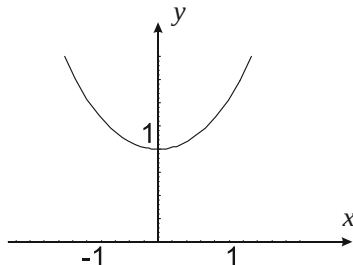
Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$y = \operatorname{sh} x.$

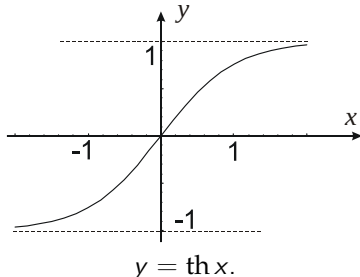


$y = \operatorname{ch} x.$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}; \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$



Relaciones hiperbólicas

$$a) \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$a') 1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$b) \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$b') \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$c) \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$c') \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$d) \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$d') \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

$$e) \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

$$f) \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

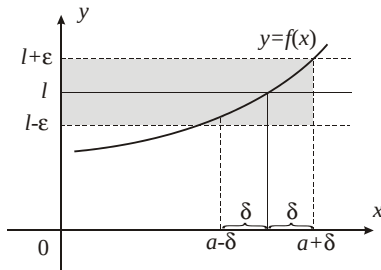
Definición de límite

► Definición de límite según Cauchy

Sea $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

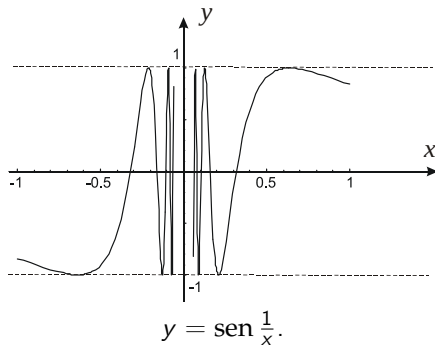
si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$



No existencia de Límite

► Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



Propiedades de los límites

► Propiedades de los límites de funciones

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$ se verifica:

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \pm v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \cdot v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u(x)}{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}; \quad (\text{si } \lim_{x \rightarrow a} v(x) \neq 0)$$

Límites de uso frecuente

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Límites laterales

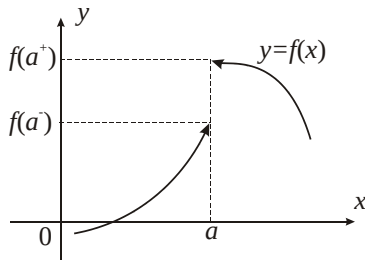
► Límites laterales

Límite por la derecha de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

$$l = f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

$$l = f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



► Límites laterales y existencia de límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Infinitésimos

► Infinitésimos

Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

► Propiedades de los Infinitésimos

- i) La suma y el producto de un número finito de infinitésimos cuando $x \rightarrow a$ es un nuevo infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.*
- ii) El producto de un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ por una función acotada cuando $x \rightarrow a$, es un nuevo infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.*

Infinitésimos

► Comparación de Infinitésimos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \rightarrow a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f \text{ es de orden superior a } g, \text{ y se denota } f = o(g) \\ \infty & f \text{ es de orden inferior a } g, \text{ y se denota } g = o(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0, 1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se denota por } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

► Orden de un Infinitésimo

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \rightarrow a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = l$$

con $0 < |l| < \infty$ se dice que la función f es un infinitésimo de orden n respecto de $g(x)$.

Infinitésimos

► Principio de Sustitución

Si en una función sustituimos un factor o un divisor infinitésimo por otro equivalente, el valor del límite de la función no varía.

Es decir si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos cuando $x \rightarrow a$ y si $\alpha(x) \sim f(x)$ y $\beta(x) \sim g(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \beta(x)\end{aligned}$$

Infinitésimos Equivalentes

$$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{tg} f(x)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$$

$$\log_a (1 + f(x)) \sim \log_a e \cdot f(x)$$

$$\ln (1 + f(x)) \sim f(x)$$

$$a^{f(x)} - 1 \sim \ln a \cdot f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$$

$$(1 + f(x))^p - 1 \sim pf(x); \quad p \in \mathbb{R}$$

Infinitos

► Infinitos

Se dice que la función $f(x)$ es un infinito cuando $x \rightarrow a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

► Comparación de infinitos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitos cuando $x \rightarrow a$. Se tienen los siguientes casos según el valor del límite del cociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & f \text{ es de orden superior a } g, \text{ y se denota } f = O(g) \\ 0 & f \text{ es de orden inferior a } g, \text{ y se denota } g = O(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0, 1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se escribe } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

Infinitos

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \sim a_n x^n$$

$$\ln(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \sim \ln x^n, \quad (a_n > 0)$$

Infinitos equivalentes.

$$\log_a x \ll x^k \ll a^x \ll x^{bx}$$

Jerarquía de infinitos.

Casos de indeterminación

$$\infty - \infty$$

$$\infty \cdot 0$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

Resolución de Indeterminaciones

- a) Límites de la forma: $0 \cdot \infty$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

- b) Límites de la forma: $\infty - \infty$

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

- c) Límites de la forma 1^∞ , ∞^0 y 0^0

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) (f(x) - 1)}$$

Asíntotas

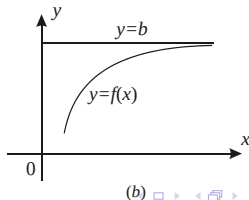
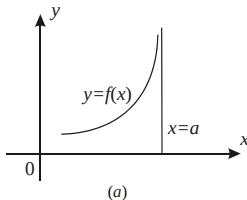
► Asíntotas

(a) La recta $x = a$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si al menos uno de los límites laterales de f en a es $+\infty$ ó $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

(b) La recta $y = b$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



Asíntotas

► Asíntotas

(c) La recta $y = mx + n$, ($m \neq 0$) es asíntota oblicua de la función $f(x)$ si

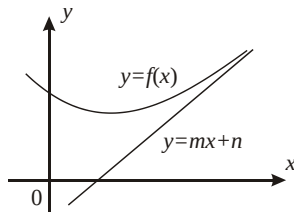
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

Cálculo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

ó

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$



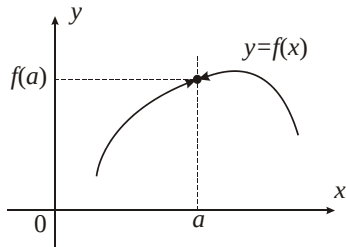
(c)

Continuidad. Definiciones

► Continuidad en un punto

Se dice que una función $f(x)$ es continua en el punto a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. De este modo la función $f(x)$ es continua en a si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$



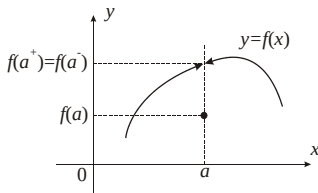
Continuidad. Definiciones

► Puntos de Discontinuidad de 1ª Especie

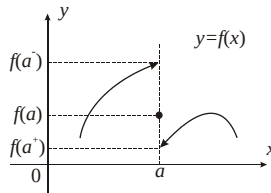
El punto a se dice punto de discontinuidad de 1ª especie de la función $f(x)$ si existen los límites por la derecha y por la izquierda y son finitos.

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$ la discontinuidad es evitable

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ la discontinuidad es no evitable



1ª especie evitable.

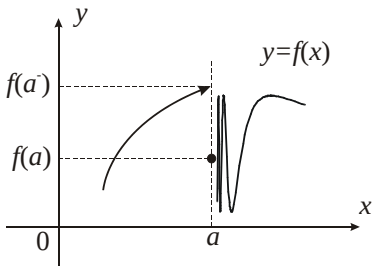


1ª especie no evitable.

Continuidad. Definiciones

► Puntos de Discontinuidad de 2ª Especie

Si al menos uno de los límites $f(a^+)$ o $f(a^-)$ no existe o es infinito, entonces a es un punto de discontinuidad de 2ª especie de $f(x)$.



2ª especie.

Continuidad de las funciones elementales

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones irracionales.
- Función exponencial.
- Función logarítmica.
- Funciones trigonométricas y sus inversas.
- Funciones hiperbólicas y sus inversas.

Propiedades de las funciones continuas

► Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta

i) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en a , también son continuas en a

$$f(x) \pm g(x); \quad f(x) \cdot g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(a) \neq 0)$$

ii) Si la función $u = \varphi(x)$ es continua en $x = a$ e $y = f(u)$ es continua en $u_a = \varphi(a)$ entonces la función compuesta $y = f[\varphi(x)]$ es continua en el punto $x = a$.

► Continuidad de la función inversa

Si la función $y = f(x)$ está definida, es estrictamente monótona creciente (decreciente) y continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(a) = c$, y $f(b) = d$, entonces existe una función inversa $x = \varphi(y)$ definida, estrictamente monótona creciente (decreciente) y también continua en el intervalo $[c, d]$ ($[d, c]$).

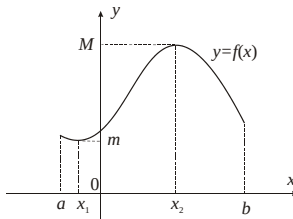
Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

► Acotación

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ está acotada en $[a, b]$

► Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$.

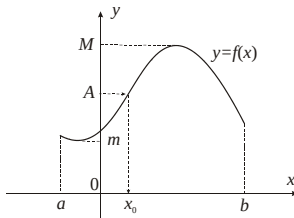


Teorema de Weierstrass.

Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

► Teorema de Darboux de los Valores intermedios

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ y $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, entonces $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre m y M .



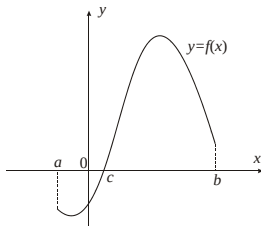
Teorema de valores intermedios.

Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

► Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo, entonces existe al menos una raíz de $f(x)$ en (a, b) , es decir

$$\text{si } f(a) \cdot f(b) < 0, \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = 0$$



Teorema de Bolzano.

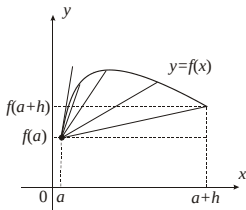
Derivada. Definiciones

► Derivada en un punto

Dada una función $y = f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, y un punto $a \in \mathring{A}$, se dice que f es derivable en a si existe y es finito, el límite

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al límite se le denomina derivada de f en el punto a .



Interpretación geométrica de la derivada.

Derivada. Definiciones

► Derivadas laterales

Sea $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si f está definida en un intervalo a la derecha de a de la forma $[a, a + \varepsilon)$, si existe el límite

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se le denomina derivada por la derecha de f en a .

Si f está definida en un intervalo a la izquierda de a de la forma $(a - \varepsilon, a]$, si existe el límite

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se le denomina derivada por la izquierda de f en a .

► Se cumple que:

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$$

Derivada. Propiedades

► Continuidad y derivabilidad

Si una función f es derivable en un punto a , entonces es continua en a .

► Continuidad de la derivada y derivabilidad

Sea $f(x)$ una función continua en a , tal que existe $f'(x)$ para todo punto de un entorno reducido de a .

i) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ entonces existe $f'(a)$ y se cumple

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

ii) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ entonces $\nexists f'(a)$.

Derivada. Propiedades

► Función derivable en un conjunto

Si la función f tiene derivada en cada punto de un intervalo abierto $A = (a, b)$ se dice que es derivable en dicho intervalo A .

Y para este tipo de funciones definimos el siguiente concepto.

► Función Derivada

Sea f una función derivable en un conjunto A . La función que en cada punto $x \in A$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada de f y se denota por f'

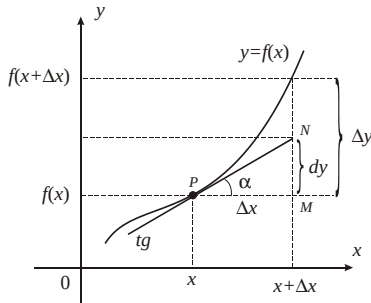
$$\begin{array}{ll} A & \rightarrow \\ x & \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{array}$$

Diferencial. Definición

► Diferencial

Sea f una función derivable. Se define la diferencial de f como

$$dy = f'(x)\Delta x$$



Derivadas de funciones elementales

$$y = k \quad y' = 0$$

$$y = x^n \quad y' = nx^{n-1}$$

$$y = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \operatorname{sen} x \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\operatorname{sen} x$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = a^x \quad y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x \quad y' = e^x$$

$$y = \log_a x \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arccos} x \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivadas de funciones elementales

$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{argsh} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{argch} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$y = \operatorname{argth} x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$

Propiedades fundamentales de la derivada

Regla de linealidad	$y = af \pm bg$	$y' = af' \pm bg'$
Regla del producto	$y = f \cdot g$	$y' = f'g + fg'$
Regla del cociente	$y = \frac{f}{g}$	$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

► Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Si $u = h(x)$ es una función derivable en a , e $y = g(u)$ es una función derivable en $h(a)$ entonces la función compuesta $y = g \circ h$, esto es $y = f(x) = g[h(x)]$ es derivable en a y se verifica

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Propiedades fundamentales de la derivada

► Derivada de la función inversa

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ inyectiva y derivable en a , con $f'(a) \neq 0$ y sea $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ su inversa. Entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y se cumple que

$$(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$$

► Derivada de una función expresada en forma paramétrica

Sea una función $y(x)$ dada, en un entorno de x_0 , por las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}$$

con $x(t_0) = x_0$. Si x es derivable en t_0 , con $x'(t_0) \neq 0$, e y es derivable en x_0 se verifica que

$$y'(x_0) = y'(t_0)/x'(t_0)$$

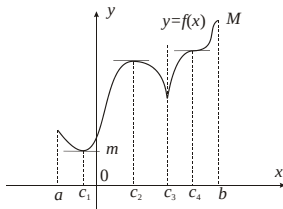
Condición necesaria de Extremo Relativo

► Condición necesaria de extremo

Sea f derivable en $c \in (a, b)$. Si c es un extremo relativo de f entonces $f'(c) = 0$.

► Punto crítico

Se dice que c es un punto crítico de f si se cumple $f'(c) = 0$ o bien $\nexists f'(c)$.



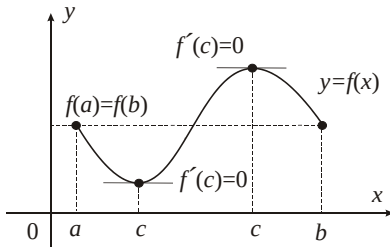
Extremos relativos.

Propiedades de las funciones derivables

► Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0$$

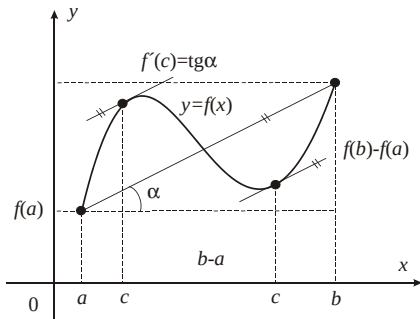


Propiedades de las funciones derivables

► Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Propiedades de las funciones derivables

► Regla de l'Hôpital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido del punto a , con $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ y

el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, o es infinito con signo determinado,

entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, verificándose

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Derivadas y Diferenciales sucesivas.

► Notación

$$f''(x) = (f')'(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \dots \left(f^{(n-1)} \right)'(x)$$

$$d(df) = d^2f$$

$$d^2f = f''(x)dx^2$$

$$d^{(n)}f = f^{(n)}(x)dx^n$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}; \dots; f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Derivadas sucesivas. Definiciones

► Derivada segunda en un punto

Si $y = f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, es una función derivable en un entorno de a se define la derivada segunda de f en a como

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

suponiendo que este límite exista y sea finito.

► Derivada n -ésima en un punto

Si $y = f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, es una función derivable $n-1$ veces en un entorno de a se define la derivada n -ésima de f en a como

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

suponiendo que este límite exista y sea finito.

Derivadas sucesivas. Propiedades

► Derivada de la suma

$$y = au(x) \pm bv(x) \rightarrow y^{(n)} = au^{(n)}(x) + bv^{(n)}(x)$$

► Derivada del producto. Fórmula de Leibniz

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \dots + \binom{n}{n} uv^{(n)}$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

...

Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

► Polinomio de Taylor

Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta orden n en un punto $x = a$. Entonces existe un polinomio $P_n(x)$, y sólo uno, de grado $\leq n$ que satisface

$$P_n(a) = f(a); P'_n(a) = f'(a); P''_n(a) = f''(a); \dots; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

y es el polinomio de Taylor

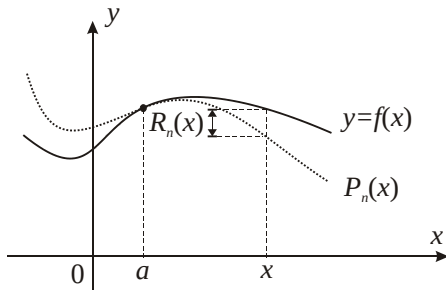
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$



Fórmula de Taylor

► Teorema de Taylor

Si las funciones $f, f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[a, x]$, existe $t \in (a, x)$ tal que el resto de Taylor de orden n de f en a viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

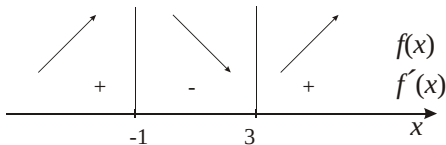
Esta es la llamada *fórmula de Taylor con el resto en la forma de Lagrange*.

Estudio local de una función

► Función creciente y decreciente. Definición

Sea f derivable en (a, b) . Entonces f es estrictamente creciente en (a, b) si $f'(x) > 0$ para $a < x < b$.

Sea f derivable en (a, b) . Entonces f es estrictamente decreciente en (a, b) si $f'(x) < 0$ para $a < x < b$.



Estudio del crecimiento y decrecimiento.

Estudio local de una función

► Condiciones suficientes de Extremo Relativo

- 1) La Definición.
- 2) Condición suficiente basada en la derivada primera.
- 3) Condición suficiente basada en la derivada segunda.
- 4) Condición suficiente basada en las derivadas superiores.

Métodos para estudiar puntos críticos.

Estudio local de una función

► Condición suficiente basada en la derivada primera

Sea c un punto crítico de la función f siendo f una función continua en un entorno de c y derivable en dicho entorno excepto, quizás, en el punto c . Si en ese entorno se cumple

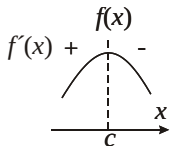
$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{para } x < c \\ f'(x) < 0 & \text{para } x > c \end{array} \right\} \Rightarrow c \text{ es máximo relativo de } f$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{para } x < c \\ f'(x) > 0 & \text{para } x > c \end{array} \right\} \Rightarrow c \text{ es mínimo relativo de } f$$

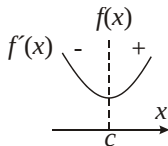
$$f'(x) \text{ tiene el mismo signo} \Rightarrow c \text{ no es extremo relativo de } f \\ \text{a ambos lados de } c$$

Estudio local de una función

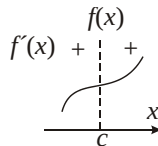
► Condición suficiente basada en la derivada primera



(a)



(b)



(c)

Estudio local de una función

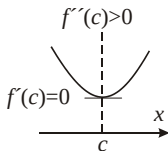
► Condición suficiente basada en la derivada segunda

Sea c un punto crítico de la función f tal que $f'(c) = 0$. Si existe y es continua la derivada segunda f'' en un entorno de c se tiene que

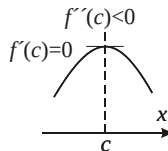
Si $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ es mínimo relativo de f

Si $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ es máximo relativo de f

Si $f''(c) = 0 \Rightarrow$ No podemos asegurar nada



(a)



(b)

Estudio local de una función

► **Condición suficiente basada en las derivadas de orden superior a dos**

Sea $f(x)$ una función con derivadas continuas hasta el orden $n+1$ en un entorno del punto c . Supongamos además que se cumple

$$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0; f^{(n+1)}(c) \neq 0; n \geq 2$$

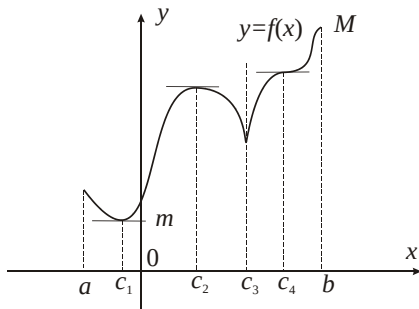
Entonces, se tiene

$$\text{Si } n+1 \text{ es par} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n+1)}(c) > 0 \Rightarrow c \text{ es mín. relativo de } f \\ f^{(n+1)}(c) < 0 \Rightarrow c \text{ es máx. relativo de } f \end{cases}$$

Si $n+1$ es impar $\Rightarrow$ no hay ni máximo ni mínimo

Extremos Absolutos. Método

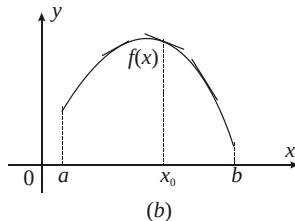
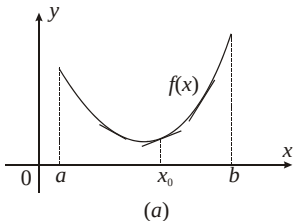
- 1) Calcular los p. críticos de f en (a, b) (en la figura son c_1, c_2, c_3 y c_4).
- 2) Hallar el valor de f en a, b y en los puntos críticos.
- 3) Comparar los valores obtenidos en el paso 2.
 - El mayor valor es el máximo absoluto de f en $[a, b]$ (en la figura es b).
 - El menor valor es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$ (en la figura es c_1).



Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

► Concavidad y Convexidad. Definición

Sea I un intervalo real y $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I . Se dice que $f(x)$ es convexa en I si y sólo si para todo $x_0, x \in I$, la gráfica de $f(x)$ en I queda por encima de la tangente a la curva de $f(x)$ en x_0 . Si la gráfica queda por debajo, la función se dice que es cóncava en I .



(a) Función convexa. (b) Función cóncava.

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

► Criterio de Concavidad y Convexidad

Sea I un intervalo real y $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I .

Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es convexa en I .

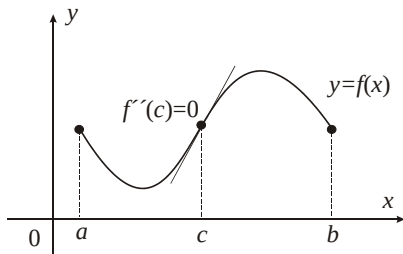
Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es cóncava en I .

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

► Punto de Inflexión. Definición

Sea I un intervalo real y $x_0 \in I$ un punto de continuidad de $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Se dice que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 , si la función pasa en este punto de convexa a cóncava, o viceversa.



Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

► Criterio de Punto de Inflexión

Sea I un intervalo real, $x_0 \in I$ y $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un entorno del punto x_0 , excepto quizás en el propio x_0 .

Si $f''(x_0) = 0$ o bien $\nexists f''(x_0)$ y $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el punto x_0 entonces la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 .

Si $f''(x)$ mantiene su signo, no hay punto de inflexión en x_0 .

Construcción de gráficas. Sumario

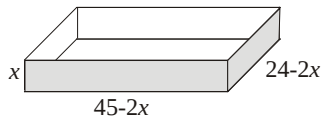
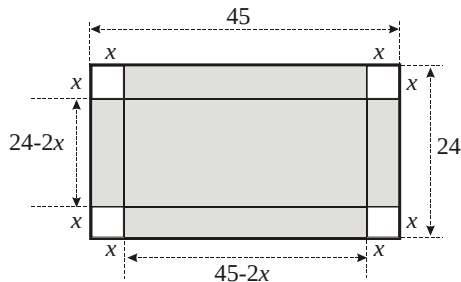
- i)* Dominio.
- ii)* Crecimiento y Decrecimiento.
- iii)* Máximos y Mínimos.
- iv)* Concavidad, Convexidad y Puntos de Inflexión.
- v)* Asíntotas.

Sumario de dibujo de curvas.

Optimización en Ingeniería. Método

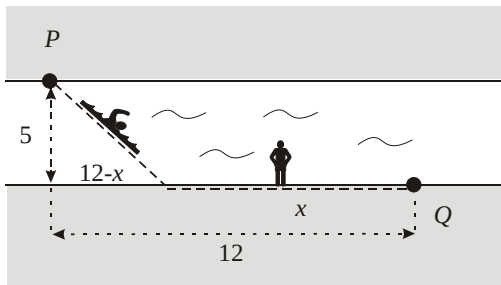
- 1) Encontrar la función a optimizar F y las variables o incógnitas: $x, y, \dots$
- 2) Hallar la relación entre las variables de forma que podamos expresar F como función de una sola variable: $F(x)$.
- 3) Hallar el dominio de la función $F(x)$.
- 4) Calcular el máximo o mínimo absoluto de $F(x)$.

Optimización en Ingeniería. Ejemplo



Construcción de una caja.

Optimización en Ingeniería. Ejemplo



Trayectoria de tiempo mínimo.