

Computación Numérica - Julio 2014

Primer parcial A

1. ¿Cómo se almacenaría en precisión simple según la norma IEEE 754 el número $-279,375$?

En precisión simple tenemos 32 bits (4 bytes) en total:

- 1 bit para el signo,
- 8 para el exponente,
- 23 para la mantisa.

Parte entera: dividimos de forma reiterada por 2 y guardamos los restos y el último cociente:

<i>cocientes</i> :	279	139	69	34	17	8	4	2	1
<i>restos</i> :	1	1	1	0	1	0	0	0	

y tomamos los dígitos en orden inverso:

100010111

Parte decimal: para convertir a binario la parte decimal, multiplicamos por 2, le quitamos la parte entera, que será nuestro dígito binario y repetimos el proceso.

<i>Decimal</i> :	0,375	0,75	0,5
<i>Entera</i> :	0	1	1

y tomamos los dígitos:

0,011

Mantisa: el número completo, para almacenarlo según la norma IEEE:

$$100010111,011 = 1,00010111011 \times 2^8$$

y no hace falta almacenar el primer uno (técnica del bit escondido). Por lo tanto la mantisa se almacena como

0001011101100...00

Exponente: como hay 8 bits para el exponente el sesgo es $2^{8-1} - 1 = 127$. El exponente en base 10 es $127 + 8 = 135$. Si lo pasamos a base 2:

<i>cocientes</i> :	135	67	33	16	8	4	2	1
<i>restos</i> :	1	1	1	0	0	0	0	

e invirtiendo el orden, el exponente es

10000111

Signo: y como el signo es negativo, el valor correspondiente al signo es 1:

signo	exponente	mantisa
1	10000111	000101110110000000000000

Primer parcial B

1. Sea la función

$$h(t) = (t^3 - 2t) + \ln(3 + t)$$

a) **Demostrar que esta función tiene al menos un extremo relativo en $[-1, 0]$.**

Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(t) = 3t^2 - 2 - \frac{1}{3+t} = \frac{3t^3 + 9t^2 - 2t - 5}{3+t}$$

Y si tomamos $f(t) = 3t^3 + 9t^2 - 2t - 5$ entonces

$$h \text{ tiene un extremo en } [-1, 0] \iff f \text{ tiene una raíz en } [-1, 0].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(t) = 0 \text{ en } [-1, 0] \iff f(t) = 0 \text{ en } [-1, 0].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[-1, 0]$ para que exista al menos una raíz en el intervalo son:

a) f continua: f es continua porque es un polinomio.

b) f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(-1) = 3$ y $f(0) = -5$

b) **Demostrar que este extremo relativo es único en $[-1, 0]$.**

Para que el extremo sea único, además de las condiciones a) y b) hace falta que se cumpla la condición adicional:

c) $f' > 0$ o $f' < 0$ en $[-1, 0]$:

$$f'(t) = 9t^2 + 18t - 2.$$

Si calculamos las raíces y factorizamos:

$$9t^2 + 18t - 2 = 9(t + 2,11)(t - 0,11)$$

Como $(t + 2,11)$ es siempre positivo en $[-1, 0]$ y $(t - 0,11)$ es siempre negativo en $[-1, 0]$ entonces $9(t + 2,11)(t - 0,11) < 0$ en $[-1, 0]$.

Por lo tanto $f' < 0$ en $[-1, 0]$ y se cumple la condición c).

c) **Aproximar el extremo utilizando el Método de Newton. Utilizar como punto inicial $x_0 = -1$ y realizar 2 iteraciones.**

Para iterar usaremos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{3x_k^3 + 9x_k^2 - 2x_k - 5}{9x_k^2 + 18x_k - 2} = \frac{6x_k^3 + 9x_k^2 + 5}{9x_k^2 + 18x_k - 2}$$

$$x_1 = \frac{6x_0^3 + 9x_0^2 + 5}{9x_0^2 + 18x_0 - 2} = \frac{6(-1)^3 + 9(-1)^2 + 5}{9(-1)^2 + 18(-1) - 2} = -0,727273$$

$$x_2 = \frac{6x_1^3 + 9x_1^2 + 5}{9x_1^2 + 18x_1 - 2} = \frac{6(-0,727273)^3 + 9(-0,727273)^2 + 5}{9(-0,727273)^2 + 18(-0,727273) - 2} = -0,721382$$

(La solución exacta es $-0,721373$)

Segundo parcial

1. **Dados los puntos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$ de la función $f(x) = x + 4x^2 - x^4$**

a) **Construir la tabla de diferencias divididas de Newton.**

x	$f(x)$			
-2	-2			
		$\frac{2-(-2)}{-1-(-2)} = 4$		
-1	2		$\frac{1-4}{1-(-2)} = -1$	
		$\frac{4-2}{1-(-1)} = 1$		$\frac{-1-(-1)}{2-(-2)} = 0$
1	4		$\frac{-2-1}{2-(-1)} = -1$	
		$\frac{2-4}{2-1} = -2$		
2	2			

Y tenemos

$$f[x_0] = -2, \quad f[x_0, x_1] = 4, \quad f[x_0, x_1, x_2] = -1, \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$$

b) **Usándola, calcular el polinomio interpolante.**

Construimos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

que es

$$P_3(x) = -2 + 4(x - (-2)) + (-1)(x - (-2))(x - (-1)) + 0(x - (-2))(x - (-1))(x - 1)$$

Por lo tanto

$$P_3(x) = 4 + x - x^2$$

2. **Calcular la integral $\int_1^2 \ln(1 + 2x)dx$ usando cinco nodos con la regla de Simpson compuesta.**

Para tener 5 nodos igualmente separados hemos de dividir el intervalo $[1, 2]$ en 4 trozos de longitud

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = 0,25.$$

Los nodos serán entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= a = 1 \\ x_1 &= x_0 + h = 1 + 0,25 = 1,25 \\ x_2 &= x_1 + h = 1,25 + 0,25 = 1,50 \\ x_3 &= x_2 + h = 1,50 + 0,25 = 1,75 \\ x_4 &= x_3 + h = 1,75 + 0,25 = 2 = b \end{aligned}$$

Cada vez que aplicamos la fórmula simple de Simpson utilizamos 3 nodos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(1 + 2x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{x_4 - x_2}{6} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2h}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{2h}{6} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2h}{6} (f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2(0,25)}{6} (\ln(1 + 2) + 4(\ln(1 + 2,5) + \ln(1 + 3,5)) + 2\ln(1 + 3) + \ln(1 + 4)) = \\ &= \frac{1}{6} (1,09861 + 4(1,25276 + 1,50408) + 2(1,38629) + 1,60944) = 1,37567 \end{aligned}$$

Tercer parcial

1. Sea el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular x utilizando la factorización LU . Indicar, en cada paso, las operaciones por fila realizadas.

En el primer paso hacemos ceros por debajo del elemento a_{11} sumando la primera fila multiplicada por un real.

$$\begin{array}{lcl} f_1 & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & f_1 \rightarrow f_1 \\ f_2 & & f_2 \rightarrow f_2 - \boxed{1/1} f_1 \\ f_3 & & f_3 \rightarrow f_3 - \boxed{1/1} f_1 \end{array}$$

Los **multiplicadores**, que aparecen en rojo, son los elementos con los que construimos la matriz L . Los insertamos en la matriz, en lugar de los ceros creados. La matriz transformada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} f_1 & \rightarrow & f_1 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 - \boxed{-1/1} f_2 \end{array}$$

Repetimos el proceso creando ceros por debajo de a'_{22} y llegamos a la matriz que almacena simultáneamente L y U .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Y las matrices L y U son:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que queremos resolver $Ax = b$ y que $A = LU$ podemos escribir $LUx = b$ y si llamamos $Ux = y$:

1. Resolvemos el sistema triangular inferior $Ly = b$ y obtenemos y .

$$\begin{array}{rclcl} y_1 & & = & 2 & y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 & & = & 4 & y_2 = 4 - y_1 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 & & = & 1 & y_3 = 1 - y_1 + y_2 = 1 \end{array}$$

2. Resolvemos el sistema triangular superior $Ux = y$ y obtenemos x , que era lo que buscábamos.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & +x_3 & = & 2 & x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 & & = & 2 & x_2 = 2 - 2x_3 = 0 \\ & x_3 & = & 1 & x_1 = 2 - x_3 = 1 \end{array}$$

2. **Utilizando el método de Newton, aproximar el mínimo de la función $f(x, y) = x^3 + 2y^3$. Utilizar el punto $(1, 2)$ como punto inicial y realizar una iteración.**

Realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H_{(x_0, y_0)}^{-1} \cdot \nabla f_{(x_0, y_0)}$$

Si consideramos que

$$H_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \nabla f_{(x_0, y_0)} \quad (1)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H_{(x_0, y_0)}^{-1} \cdot \nabla f_{(x_0, y_0)}$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde $(c_1, c_2)^T$ es la solución del sistema (1).

Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (3x^2, 6y^2)$$

y

$$\nabla f_{(x_0, y_0)} = \nabla f_{(1, 2)} = (3, 24).$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y \end{pmatrix}$$

y

$$H_{(x_0, y_0)} = H_{(1, 2)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

y resolviéndolo

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 17$ y $f(x_1, y_1) = f(1/2, 1) \approx 2,1$ que es menor.