

Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2014

1. Sea el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz de iteración de Gauss-Seidel B_{G-S} .

La matriz $B_{G-S} = -(L + D)^{-1}U$ con

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$L + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos por Gauss-Jordan $(L + D)^{-1}$

$$\begin{array}{lcl} f_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & f_1 \rightarrow f_1 \\ f_2 & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & f_2 \rightarrow f_2 - (2/1)f_1 \\ f_3 & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & f_3 \rightarrow f_3 - (0/1)f_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & f_1 \rightarrow f_1 - (0/5)f_2 \\ f_2 & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & f_2 \rightarrow f_2 \\ f_3 & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & f_3 \rightarrow f_3 - (-1/5)f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & f_1 \rightarrow f_1 \\ f_2 & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & f_2 \rightarrow f_2/5 \\ f_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} & f_3 \rightarrow f_3/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}$$

y

$$B_{G-S} = -(L+D)^{-1}U = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \\ -2/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15 \end{pmatrix}$$

- b) **Calcular la norma infinito de la matriz de iteración de Gauss-Seidel B_{G-S} . Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$B_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 + 2 + 0 = 2 \\ 0 + 4/5 + 1/5 = 1 \\ 0 + 4/15 + 1/15 = 1/3 \end{array}$$

$$\|B_{G-S}\|_{\infty} = \text{Max}(2, 1, 1/3) = 2$$

Como $\|B_{G-S}\|_{\infty} < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

- c) **Calcular la norma uno de B_{G-S} . Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$B_{G-S}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4/5 & 4/15 \\ 0 & 1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 4/5 + 1/5 = 46/15 \\ 0 + 1/5 + 1/15 = 4/15 \end{array}$$

$$\|B_{G-S}\|_1 = \text{Max}(0, 46/15, 4/15) = 46/15$$

Como $\|B_{G-S}\|_1 < 1$ es condición suficiente, no necesaria, de convergencia, no podemos asegurar ni que converge ni que no converge.

- d) **Calcular los autovalores de B_{G-S} . Partiendo de este resultado ¿qué podemos decir de la convergencia del método de Gauss-Seidel?**

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & 4/5 - \lambda & 1/5 \\ 0 & 4/15 & 1/15 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \left(\frac{4}{5} - \lambda \right) \left(\frac{1}{15} - \lambda \right) - \frac{4}{15} \frac{1}{5} (-\lambda) = \frac{13}{15} \lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda) (\lambda) \left(\frac{13}{15} - \lambda \right) = 0$$

Y los autovalores son

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{13}{15}$$

La condición necesaria y suficiente para que el método de Gauss-Seidel converja es que todos los autovalores, en valor absoluto, sean menores que 1. Como esta condición se cumple, el método converge.

e) **Realizar una iteración con Gauss-Seidel. Utilizar $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.**

El sistema es

$$\begin{array}{rcl} x & +2y & = 1 \\ 2x & +5y & -z = 3 \\ & -y & +3z = -3 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x , en la segunda, la segunda incógnita, y , y finalmente, z .

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2y \\ y & = & (3 - 2x + z) / 5 \\ z & = & (-3 + y) / 3 \end{array}$$

Realizamos una iteración

$$\begin{array}{rcl} x^{(1)} & = & 1 - 2y^{(0)} = 1 - 2(0) = 1 \\ y^{(1)} & = & (3 - 2x^{(1)} + z^{(0)}) / 5 = (3 - 2(1) + (0)) / 5 = 0,2 \\ z^{(1)} & = & (-3 + y^{(1)}) / 3 = (-3 + 0,2) / 3 = -2,8 \end{array}$$

2. **Utilizando el método del gradiente, aproximar el mínimo de la función $f(x, y) = x^4 + y^4$. Utilizar el punto (1,1) como punto inicial y realizar una iteración.**

Realizaremos una iteración por el método del gradiente usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - h \nabla f_{(x_0, y_0)} \quad (1)$$

y buscaremos h para que

$$g(h) = f(x_0 - hf_x(1, 1), y_0 - hf_y(1, 1))$$

tenga un valor mínimo.

Tenemos que

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (4x^3, 4y^3)$$

y

$$\nabla f_{(x_0, y_0)} = \nabla f_{(1, 1)} = (4, 4).$$

$$g(h) = f(x_0 - hf_x(1, 1), y_0 - hf_y(1, 1)) = f(1 - 4h, 1 - 4h) = (1 - 4h)^4 + (1 - 4h)^4 = 2(1 - 4h)^4$$

Optimizemos esta función:

$$g'(h) = 8(1 - 4h)^3(-4) = 0 \implies 1 - 4h = 0 \implies h = \frac{1}{4}$$

y usando este valor en la ecuación (1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado al mínimo porque $f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 2$ y $f(x_1, y_1) = f(0, 0) = 0$ que es el menor valor posible puesto que f es siempre positivo.

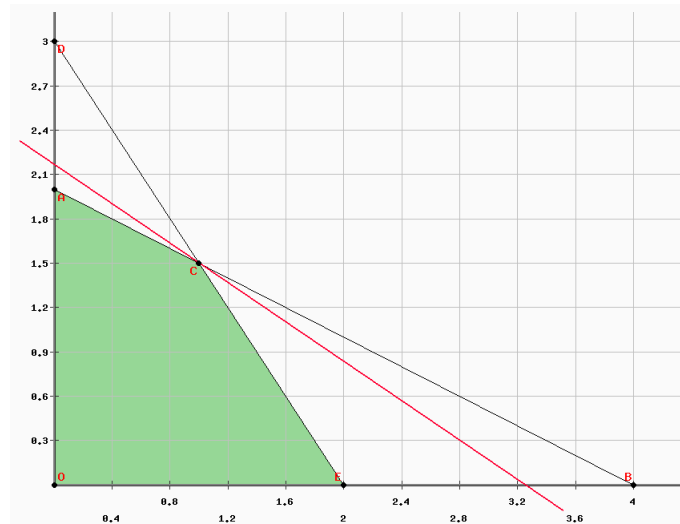


Figura 1: Solución gráfica del problema 3.

3. Maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$ con las restricciones

$$x + 2y \leq 4, \quad 3x + 2y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

a) Geométricamente.

La región de posibles soluciones es la región verde. Una curva de nivel de f es la línea roja. La función crece hacia la derecha. El punto donde la función es máxima es $B(1, 1,5)$ y en él la función vale $f(1, 1,5) = 6,5$.

b) Mediante el algoritmo simplex.

Reescribimos las condiciones

$$F - 2x - 3y = 0$$

$$x + 2y + r = 4$$

$$3x + 2y + s = 6$$

y entonces la tabla es:

	F	x	y	r	s	Valor
f_1	1	-2	-3	0	0	0
f_2	0	1	2	1	0	4
f_3	0	3	2	0	1	6

En la primera fila el valor negativo con mayor valor absoluto es -3 y, de los valores de esta columna debajo de -3 en la segunda fila el $Valor/y = 4/2 = 2$ y en la tercera $6/2 = 3$. Elejimos la segunda fila como ecuación pivotal porque de los dos valores 2 es menor que 3. Por lo tanto el pivote está en la segunda columna, segunda fila. Realizamos las operaciones por fila

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow f_1 - \frac{-3}{2} f_2 \\ f_3 &\rightarrow f_3 - \frac{2}{2} f_2 \\ f_2 &\rightarrow \frac{1}{2} f_2 \end{aligned}$$

y la matriz se transforma en

	F	x	y	r	s	Valor
f_1	1	$-1/2$	0	$3/2$	0	6
f_2	0	$1/2$	1	$1/2$	0	2
f_3	0	2	0	-1	1	2

En la primera fila queda el valor negativo $-1/2$ y, de los valores de esta columna en la segunda fila tenemos el $Valor/y = 2/(1/2) = 4$ y en la tercera $2/2 = 1$. Elejimos la tercera fila como ecuación pivotal porque de los dos valores 2 es menor que 3. Por lo tanto el pivote está en la segunda columna, segunda fila. Realizamos las operaciones por fila

$$\begin{array}{lcl} f_1 & \rightarrow & f_1 - \frac{-1/2}{2} f_3 \\ f_2 & \rightarrow & f_2 - \frac{1/2}{2} f_3 \\ f_3 & \rightarrow & \frac{1}{2} f_3 \end{array}$$

F	x	y	r	s	Valor
1	0	0	$5/2$	$1/4$	$13/2$
0	0	1	$3/4$	$-1/4$	$3/2$
0	1	0	$-1/2$	$1/2$	1

Ya no hay valores negativos en la primera fila y hemos acabado. En la columna de F el valor a la altura del 1 es $13/2 = 6,5$, en la columna de y el valor en la fila del 1 es $3/2 = 1,5$ y en la columna de x , 1. Resumiendo, el máximo está en $(x, y) = (1, 1,5)$ y el valor del máximo es $f(1, 1,5) = 6,5$.