

Computación Numérica

Primer Parcial A - Mayo 2014

Una máquina almacena números en punto flotante en 11 bits. El primer bit se usa para el signo del número, los cinco siguientes para el exponente sesgado y los últimos cinco bits para la mantisa. Si se sigue un criterio similar al de la norma IEEE 754:

1. Calcular el número $(11011001011)_2$ en base 10.

<i>signo</i>	1
<i>exponente</i>	10110
<i>mantisa</i>	01011

Cálculo del exponente

El exponente sesgado es $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$. Si el número de bits del exponente es $m = 5$, entonces el *sesgo* = $2^{m-1} - 1 = 15$ y el exponente es

$$22 - \text{sesgo} = 22 - 15 = 7$$

Cálculo de la mantisa

Teniendo en cuenta el bit escondido, la mantisa es $(1),01011$ que en base 10 es

$$1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} = 1,34375$$

Número

Como el bit del signo es 1 el número es negativo. Teniendo en cuenta la mantisa y el exponente, el número en base 10 es

$$-(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5}) \times 2^7 = -172$$

2. ¿Cual sería el ϵ de máquina?

Formato decimal

El número 1 teniendo en cuenta el bit escondido sería $(1),00000 \times 2^0$. El ϵ de máquina es el número más pequeño que se puede alinear con este 1 en este formato para sumárselo:

$$\begin{cases} 1 = 1,00000 & \times 2^0 \\ \epsilon = 0,00001 & \times 2^0 = 1,000000 \times 2^{-5} = 2^{-5} = 0,03125 \end{cases}$$

Formato binario

Como el número es $1,000000 \times 2^{-5}$ la mantisa es $(1),00000$. El exponente sesgado será $-5 + \text{sesgo} = -5 + 15 = 10 = 2^3 + 2^1$ y que en binario será 01010. Por lo tanto.

$$\epsilon = 0\ 01010\ 000000$$

3. ¿Cual sería el mayor real desnormalizado?

Formato decimal

Si se almacena en forma desnormalizada:

- El exponente en binario es 00000.
- Se asume como exponente el menor posible de los normalizados.
- Se asume que el bit escondido es 0.

El menor exponente posible es, sesgado, 00001 y sin sesgar $1 - sesgo = 1 - 15 = -14$. Por lo tanto, el mayor número desnormalizado es $(0),11111 \times 2^{-14}$ que en decimal es

$$(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5}) \times 2^{-14} = 0,0000591278$$

Formato binario

Ya se ha dicho que el exponente se escribe 00000 y como la mantisa es $(0),11111$, teniendo en cuenta el signo, se escribirá

0 00000 11111

4. Calcular el número $(11,25)_{10}$ en este formato de 11 bits.

Cálculo de la mantisa

Para convertir a binario la parte decimal, multiplicamos por 2, le quitamos la parte entera, que será nuestro dígito binario y repetimos el proceso.

$$\begin{array}{lcl} \text{Decimal :} & 0,25 & 0,5 \quad 0 \\ \text{Entera :} & & 0 \quad 1 \end{array}$$

y tomamos los dígitos:

0,01

Para convertir a binario la parte entera 11 dividimos de forma reiterada por 2 y guardamos los restos:

$$\begin{array}{lcl} \text{cocientes :} & 11 & 5 \quad 2 \quad 1 \\ \text{restos :} & 1 & 1 \quad 0 \end{array}$$

empezando por el último cociente, seguimos con los restos en orden inverso:

1011

que almacenamos

$$1011,01 = (1),01101 \times 2^3$$

y no hace falta almacenar el primer uno. Por lo tanto la mantisa se almacena como

01101

Cálculo del exponente

El $sesgo = 15$. El exponente sesgado será $exponente + sesgo = 3 + 15 = 18 = 2^4 + 2^1$, que en binario es 10010.

Número

signo	exponente	mantisa
0	10010	01101

Primer Parcial B - Mayo 2014

Sea la ecuación

$$h(t) = t^3 - 6t^2 + t + \ln t$$

1. **Demostrar que esta función tiene un único extremo relativo en $[3, 4]$.**

Para que el punto α será un extremo de h es necesario que $h'(\alpha) = 0$. Como

$$h'(x) = 3t^2 - 12t + 1 + \frac{1}{t} = \frac{3t^3 - 12t^2 + t + 1}{t}$$

si tomamos $f(x) = 3t^3 - 12t^2 + t + 1$ entonces

$$h \text{ tiene un extremo en } [3, 4] \iff f \text{ tiene una raíz en } [3, 4].$$

O lo que es lo mismo

$$h'(x) = 0 \text{ en } [3, 4] \iff f(x) = 0 \text{ en } [3, 4].$$

Las condiciones (suficientes, no necesarias) que ha de cumplir f en $[3, 4]$ para que exista una raíz en el intervalo son:

- a) f continua: f es continua porque es la suma de funciones continuas, el polinomio lo es siempre y $\ln x$ es continua en todo su dominio.
- b) f tiene distinto signo en los extremos del intervalo: $f(3) = -23$ y $f(4) = 5$
- c) $f' > 0$ o $f' < 0$ en $[3, 4]$:

$$f'(t) = 9t^2 - 24t + 1$$

Si calculamos las raíces y factorizamos:

$$9t^2 - 24t + 1 = 9(t - 0,042)(t - 2,62)$$

Como $(t - 0,042)$ es siempre positivo en $[3, 4]$ y $(t - 2,62)$ también $9t^2 - 24t + 1 > 0$ en $[3, 4]$.

Por lo tanto $f' > 0$ en $[3, 4]$.

2. ¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo? ¿Por qué?

Si porque se cumplen las condiciones necesarias, que son las condiciones a) y b) de la pregunta anterior.

3. Aproximar el extremo haciendo dos iteraciones con el método de bisección.

k	a	c	b	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$cota\ de\ error$
0	3		4	-23		5	$4-3=1$
1	3	$(a+b)/2=(3+4)/2=3.5$	4	-23	-13.9	5	$3.5-3=0.5$
2	3.5	$(a+b)/2=(3.5+4)/2=3.75$	4	-13.9	-5.8	5	$4-3.75=0.25$

Y podemos dar como raíz aproximada 3,75 (la raíz verdadera es 3,89236 $\in$ [3,75, 4]).

4. Dar una cota del error.

La raíz está en el intervalo [3,75, 4] por lo tanto la cota de error es $4 - 3,75 = 0,25$

5. Aproximar dicho extremo haciendo dos iteraciones con el método de Newton con $x_0 = 4$.

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)} = t_k - \frac{3t_k^3 - 12t_k^2 + t_k + 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1} = \frac{6t_k^3 - 12t_k^2 - 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1}$$

k	$t_{k+1} = \frac{6t_k^3 - 12t_k^2 - 1}{9t_k^2 - 24t_k + 1}$
0	4
1	3,89796
2	3,89238

(la raíz verdadera es 3,89236).