Computación Numérica

Tercer Parcial - Mayo 2013

1. Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular x utilizando la factorización LU. Indicar, en cada paso, las operaciones por fila realizadas.

En el primer paso hacemos ceros por debajo del elemento a_{11} sumando la primera fila multiplicada por un real.

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lllll} f_1 & \rightarrow & f_1 & & \\ f_2 & \rightarrow & f_2 & - & \boxed{2/1} \; f_1 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 & - & \boxed{0/1} \; f_1 \end{array}$$

Los multiplicadores, que aparecen en rojo, son los elementos con los que construímos la matriz L. Los insertamos en la matriz, en lugar de los ceros creados. La matriz transformada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \\ \boxed{0} & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lllll} f_1 & \rightarrow & f_1 & & \\ f_2 & \rightarrow & f_2 & & \\ f_3 & \rightarrow & f_3 & - & \boxed{-1/1} \; f_2 \end{array}$$

Repetimos el proceso creando ceros por debajo de a'_{22} y llegamos a la matriz que almacena simultáneamente L y U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix}$$

Y las matrices L y U son:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que queremos resolver $Ax = b$ y que $A = LU$ podemos escribir $LUx = b$ y si llamamos $Ux = y$:

1. Resolvemos el sistema triangular inferior $Ly = b$ y obtenemos y.

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & & & = & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & & = & 3 \\ & -y_2 & +y_3 & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} y_1 & = & 1 \\ y_2 & = & 3 - 2y_1 = 1 \\ y_3 & = & -3 + y_2 = -2 \end{array}$$

2. Resolvemos el sistema triangular superior $Ux = y$ y obtenemos x, que era lo que buscábamos.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & & 2x_3 & = & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_3 & = & -2/2 & = & -1 \\ x_2 & = & 1+x_3 & = & 0 \\ x_1 & = & 1-2x_2 & = & 1 \end{array}$$

(b) ¿Es A diagonal dominante por filas?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |1| < |2| + |0|$$

No, puesto que no se verifica $|1| > |2| + |0|$

(c) Calcular la matriz de iteración de Jacobi B_J.

Se tiene que $B_J = -D^{-1}(A - D)$. O también:
1. Dividimos cada fila por el correspondiente elemento de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2/5 & 1 & -1/5 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Cambiamos todos los elementos de signo.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2/5 & -1 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ponemos ceros en la diagonal principal.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Calcular la norma infinito de la matriz de iteración de Jacobi B_J.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0+2+0=2 \\ 2/5+0+1/5=3/5 \\ 0+1/3+0=1/3 \end{array}$$

$$||B_J||_\infty = \text{Max}\,(2, 3/5, 1/3) = 2$$

(e) Calcular la norma uno de B_J.

$$B_J^T = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ -2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0+2/5+0=2/5 \\ 2+0+1/3=7/3 \\ 0+1/5+0=1/5 \end{array}$$

$$||B_J||_1 = \text{Max}\,(2/5, 7/3, 1/5) = 7/3$$

(f) Calcular los autovalores de B_J.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 0 \\ -2/5 & 0-\lambda & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \frac{13}{15}\lambda - \lambda^3 = \lambda\left(\frac{13}{15} - \lambda^2\right) = 0$$

Y los autovalores son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{13}{15}}$$

(g) A partir de cada uno de los apartados anteriores ¿qué podemos concluir acerca de la convergencia del método de Jacobi?

- Como A no es diagonal dominante, no podemos concluir nada.
- Como $||B_J||_\infty > 1$ no podemos concluir nada.
- Como $||B_J||_1 > 1$ no podemos concluir nada.
- Como todos los autovalores de B_J son menores que uno en valor absoluto podemos concluir que el Método de Jacobi será convergente para cualquier valor inicial.

(g) Realizar 2 iteraciones con Jacobi. Utilizar $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

El sistema es

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & & = & 1 \\ 2x & +5y & -z & = & 3 \\ & -y & +3z & = & -3 \end{array}$$

En la primera ecuación despejamos la primera incógnita, x, en la segunda, la segunda incógnita, y, y finalmente, z.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-2y \\ y & = & (3-2x+z)/5 \\ z & = & (-3+y)/3 \end{array}$$

Realizamos la primera iteración

$$\begin{array}{rcl} x^{(1)} & = & 1-2y^{(0)} = 1-2(0) = 1 \\ y^{(1)} & = & \left(3-2x^{(0)}+z^{(0)}\right)/5 = (3-2(0)+(0))/5 \ = 3/5 \\ z^{(1)} & = & \left(-3+y^{(0)}\right)/3 = (-3+(0))/3 = -1 \end{array}$$

y la segunda

$$\begin{array}{rcl} x^{(2)} & = & 1-2y^{(1)} = 1-2(3/5) = -1/5 \\ y^{(2)} & = & \left(3-2x^{(1)}+z^{(1)}\right)/5 = (3-2(1)+(-1))/5 \ = 0 \\ z^{(2)} & = & \left(-3+y^{(1)}\right)/3 = (-3+(3/5))/3 = -4/5 \end{array}$$

2. Utilizando el método de Newton, aproximar el mínimo de la función $f(x, y) = x^4 + y^4$. **Utilizar el punto (1,1) como punto inicial y realizar una iteración.**

Realizaremos una iteración por el método de Newton usando la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

Si consideramos que

$$H_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \nabla f_{(x_0,y_0)} \tag{1}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = H^{-1}_{(x_0,y_0)} \cdot \nabla f_{(x_0,y_0)}$$

y escribiremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde $(c_1, c_2)^T$ es la solución del sistema (1).

Tenemos que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \left(4x^3, 4y^3 \right)$$

y

$$\nabla f_{(x_0,y_0)} = \nabla f_{(1,1)} = (4, 4)\,.$$

Además

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_{(x_0,y_0)} = H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

El sistema (1) es

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y resolviéndolo

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2) es

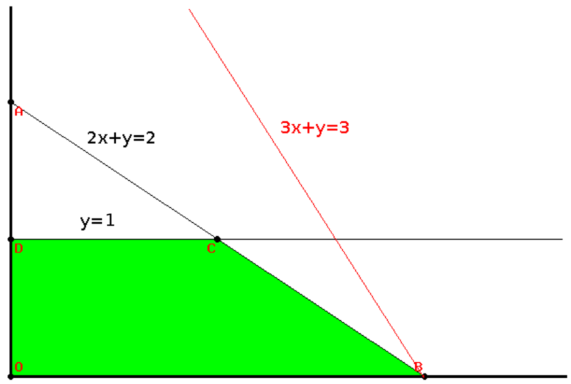
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Hemos mejorado porque $f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 2$ y $f(x_1, y_1) = f(2/3, 2/3) \approx 0{,}4$ que es menor.

3. Maximizar la función $f(x, y) = 3x + y$ con las restricciones

$$2x + y \leq 2, \quad y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Geométricamente.



La región de posibles soluciones es la región verde. Una curva de nivel de f es la línea roja. La función crece hacia la derecha. El punto donde la función es máxima es $B\,(1, 0)$ y en él la función vale $f(1, 0) = 3$.

Mediante el algoritmo simplex.

Reescribimos las condiciones

$$\begin{aligned}&F - 3x - y = 0\\ &2x + y + r = 2\\ &y + s = 1\end{aligned}$$

y entonces la tabla es:

	F	x	y	r	s	Valor
f_1	1	-3	-1	0	0	0
f_2	0	**2**	1	1	0	2
f_3	0	0	1	0	1	1

En la primera fila el valor negativo con mayor valor absoluto es -3 y, de los valores de esta columna debajo de -3 el único pivote posible es 2. Por lo tanto el pivote está en la segunda columna, segunda fila. Realizamos las operaciones por fila

$$\begin{array}{lllll} f_1 & \rightarrow & f_1 & - & \frac{-3}{\mathbf{2}} & f_2 \\ f_3 & \rightarrow & f_3 & - & \frac{0}{\mathbf{2}} & f_2 \\ f_2 & \rightarrow & \frac{1}{\mathbf{2}} & f_2 & & \end{array}$$

y la matriz se trasforma en

F	x	y	r	s	Valor
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	**3**
0	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**1**
0	0	1	0	1	1

Ya no hay valores negativos en la primera fila y hemos acabado. En la columna de F el valor a la altura del 1 es 3, en la columna de x el valor en la fila del 1 es 1 y en la columna de y, como no sé da la situación anterior (todos ceros y un uno), el valor de y es 0. Resumiendo máximo en $(x, y) = (1, 0)$ y el valor del máximo es $f(1, 0) = 3$.