

# Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2013

## 1. Tenemos los siguientes datos del movimiento de un cuerpo

|                 |    |    |    |    |     |
|-----------------|----|----|----|----|-----|
| $t(\text{s})$   | 10 | 15 | 18 | 22 | 24  |
| $v(\text{m/s})$ | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

¿cuál será la velocidad a los 11s? Usar interpolación lineal a trozos.

Para interpolar con un polinomio de grado uno (interpolación lineal), necesitamos dos puntos. Los  $t$  más próximos a 11 son 10 y 15. Además el intervalo  $[10, 15]$  contiene 11.

Para usar la notación habitual  $x = t$  y  $f(x) = v(t)$ . Voy a calcular el polinomio interpolante en la forma de Newton. Construimos la tabla de diferencias divididas con  $x_0 = 10$  y  $x_1 = 15$ :

| $x$ | $f(x)$ |                                     |
|-----|--------|-------------------------------------|
| 10  | 22     |                                     |
| 15  | 24     | $\frac{22-24}{10-15} = \frac{2}{5}$ |

Ya tenemos

$$f[x_0] = 22, \quad f[x_0, x_1] = \frac{2}{5}$$

Construimos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ P_1(x) &= 22 + \frac{2}{5}(x - 10) \end{aligned}$$

y entonces

$$P_1(11) = 22 + \frac{2}{5}(11 - 10) = 22,4 \text{ m/s}$$

**2. Dados los puntos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  y  $x_3 = 2$  de la función  $f(x) = x^2 - x^4$**   
**(a) Construir la tabla de diferencias divididas de Newton.**

| $x$ | $f(x)$ |                             |                            |                            |  |
|-----|--------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|--|
| -1  | 0      |                             |                            |                            |  |
|     |        | 0                           |                            |                            |  |
| 0   | 0      |                             | 0                          |                            |  |
|     |        | 0                           |                            | $\frac{0-(-6)}{-1-2} = -2$ |  |
| 1   | 0      |                             | $\frac{0-(-12)}{0-2} = -6$ |                            |  |
|     |        | $\frac{0-(-12)}{1-2} = -12$ |                            |                            |  |
| 2   | -12    |                             |                            |                            |  |

Ya tenemos

$$f[x_0] = 0, \quad f[x_0, x_1] = 0, \quad f[x_0, x_1, x_2] = 0, \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -2$$

**(b) Usándola, calcular el polinomio interpolante.**

Construimos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

que es

$$P_3(x) = 0 + 0(x - (-1)) + 0(x - (-1))(x - 0) + \\ + (-2)(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$

Por lo tanto

$$P_3(x) = 2(x - x^3)$$

**3. Dada la función  $f(x) = x^4$  y dados los puntos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$  calcular la parábola que aproxima de forma discreta a la función utilizando la base de polinomios ortogonales  $\{1, x, 3x^2 - 2\}$ .**

Para una base de polinomios  $\{P_0, P_1, P_2\}$  el polinomio de aproximación es de la forma  $P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$  donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  son la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & \langle P_0, P_1 \rangle & \langle P_0, P_2 \rangle \\ \langle P_1, P_0 \rangle & \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_2 \rangle \\ \langle P_2, P_0 \rangle & \langle P_2, P_1 \rangle & \langle P_2, P_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, f(x) \rangle \\ \langle P_1, f(x) \rangle \\ \langle P_2, f(x) \rangle \end{pmatrix}.$$

Si los polinomios son ortogonales para el producto escalar utilizado se tiene que

$$\begin{pmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle P_1, P_1 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle P_2, P_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, f(x) \rangle \\ \langle P_1, f(x) \rangle \\ \langle P_2, f(x) \rangle \end{pmatrix},$$

y entonces

$$a_0 = \frac{\langle P_0, f(x) \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} \quad a_1 = \frac{\langle P_1, f(x) \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} \quad a_2 = \frac{\langle P_2, f(x) \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle}.$$

En este caso el producto escalar es

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \sum_{k=1}^3 g(x_k) h(x_k).$$

Si hacemos los cálculos:

$$\begin{aligned} \langle P_0, f(x) \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_0(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^3 1 \times x_k^4 = \sum_{k=1}^3 x_k^4 \\ \langle P_1, f(x) \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_1(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^3 x_k \times x_k^4 = \sum_{k=1}^3 x_k^5 \\ \langle P_2, f(x) \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_2(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^3 (3x_k^2 - 2) \times x_k^4 \\ \langle P_0, P_0 \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_0(x_k) P_0(x_k) = \sum_{k=1}^3 1 \times 1 = \sum_{k=1}^3 1 \\ \langle P_1, P_1 \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_1(x_k) P_1(x_k) = \sum_{k=1}^3 x_k \times x_k = \sum_{k=1}^3 x_k^2 \\ \langle P_2, P_2 \rangle &= \sum_{k=1}^3 P_2(x_k) P_2(x_k) = \sum_{k=1}^3 (3x_k^2 - 2)^2 \end{aligned}$$

Construyamos una tabla para calcular estos valores

|          | 1 | $x_k$ | $x_k^2$ | $x_k^4$ | $x_k^5$ | $3x_k^2 - 2$ | $(3x_k^2 - 2)^2$ | $(3x_k^2 - 2)x_k^4$ |
|----------|---|-------|---------|---------|---------|--------------|------------------|---------------------|
|          | 1 | -1    | 1       | 1       | -1      | 1            | 1                | 1                   |
|          | 1 | 0     | 0       | 0       | 0       | -2           | 4                | 0                   |
|          | 1 | 0     | 1       | 1       | -1      | 1            | 1                | 1                   |
| $\Sigma$ | 3 |       | 2       | 2       | 0       |              | 6                | 2                   |

$$a_0 = \frac{\langle P_0, f(x) \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\sum_{k=1}^3 x_k^4}{\sum_{k=1}^3 1} = \frac{2}{3}$$

$$a_1 = \frac{\langle P_1, f(x) \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\sum_{k=1}^3 x_k^5}{\sum_{k=1}^3 x_k^2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_2 = \frac{\langle P_2, f(x) \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{\sum_{k=1}^3 (3x_k^2 - 2) \times x_k^4}{\sum_{k=1}^3 (3x_k^2 - 2)^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

y el polinomio es

$$P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) = \frac{2}{3} \times P_0(x) + 0 \times P_1(x) + \frac{1}{3} \times P_2(x)$$

$$P(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} (3x^2 - 2) = x^2$$

4. Dada la función  $\mathbf{f}(x, y) = (xy, -xy)$  calcular una aproximación de la divergencia

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}(x_m, y_n)) = \partial_x f_1(x_m, y_n) + \partial_y f_2(x_m, y_n)$$

para  $(x_m, y_n) = (1, -1)$  con  $h_x = h_y = 0,2$ .

El primer término será:

$$\begin{aligned}\partial_x f_1(x_m, y_n) &\approx \frac{f_1(x_m + h_x, y_n) - f_1(x_m - h_x, y_n)}{2h_x} = \frac{f_1(1 + 0,2, -1) - f_1(1 - 0,2, -1)}{2(0,2)} = \\ &= \frac{(1 + 0,2)(-1) - (1 - 0,2)(-1)}{2(0,2)} = \\ &= \frac{-1,2 - (-0,8)}{0,4} = \frac{-0,4}{0,4} = -1.\end{aligned}$$

Y el segundo término

$$\begin{aligned}\partial_y f_2(x_m, y_n) &\approx \frac{f_2(x_m, y_n + h_y) - f_2(x_m, y_n - h_y)}{2h_y} = \frac{f_2(1, -1 + 0,2) - f_2(1, -1 - 0,2)}{2(0,2)} = \\ &= \frac{-(1)(-1 + 0,2) - (-(1)(-1 - 0,2))}{2(0,2)} = \\ &= \frac{0,8 - 1,2}{0,4} = \frac{-0,4}{0,4} = -1\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}(1, -1)) = \partial_x f_1(1, -1) + \partial_y f_2(1, -1) \approx -1 - 1 = -2$$

**5. Usando cuatro nodos, aproximar la integral  $\int_{-2}^1 e^x dx$  con la regla del Trapecio compuesta.**

Para tener 4 nodos igualmente separados hemos de dividir el intervalo  $[-2, 1]$  en 3 trozos de longitud

$$h = \frac{b - a}{3} = \frac{1 - (-2)}{3} = 1.$$

Los nodos serán entonces

$$x_0 = a = -2$$

$$x_1 = x_0 + h = -2 + 1 = -1$$

$$x_2 = x_1 + h = -1 + 1 = 0$$

$$x_3 = x_2 + h = 0 + 1 = 1 = b$$

Cada vez que aplicamos la fórmula simple de los trapecios utilizamos 2 nodos. Por lo tanto, si  $f(x) = e^x$ :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{x_2 - x_1}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \frac{x_3 - x_2}{2} (f(x_2) + f(x_3)) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2} (f(x_2) + f(x_3)) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{-2} + 2(e^{-1} + e^0) + e^1) = \\ &= \frac{1}{2} (0,1353 + 2(0,3679 + 1) + 2,7183) = 2,7947 \end{aligned}$$