

Computación Numérica

Primer Parcial - Mayo 2013

1. ¿Cómo se almacenaría en precisión simple según la norma IEEE 754 el número 69,875?

En precisión simple tenemos 32 bits (4 bytes) en total:

- 1 bit para el signo,
- 8 para el exponente,
- 23 para la mantisa.

Primero la parte entera: dividimos de forma reiterada por 2 y guardamos los restos:

$$\begin{array}{rcl} \text{cocientes :} & 69 & 34 & 17 & 8 & 4 & 2 & 0 \\ \text{restos :} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

y tomamos los dígitos en orden inverso:

$$1000101$$

Comprobamos que es correcto:

$$1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 69$$

Para convertir a binario la parte decimal, multiplicamos por 2, le quitamos la parte entera, que será nuestro dígito binario y repetimos el proceso.

$$\begin{array}{rcl} \text{Decimal :} & 0,875 & 0,75 & 0,5 \\ \text{Entera :} & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

y tomamos los dígitos:

$$0,111$$

Comprobamos que es correcto:

$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0,875$$

El número completo, para almacenarlo según la norma IEEE:

$$1000101,111 = 1,000101111 \times 2^6$$

y no hace falta almacenar el primer uno (técnica del bit escondido). Por lo tanto la mantisa se almacena como

$$000101111000000000000000$$

Como hay 8 bits para el exponente el sesgo es $2^{8-1} - 1 = 127$. El exponente en base 10 es $127 + 6 = 133$. Si lo pasamos a base 2:

$$\begin{array}{rcll} \text{cocientes :} & 133 & 66 & 33 & 16 & 8 & 4 & 2 & 0 \\ \text{restos :} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

e invirtiendo el orden, el exponente es

$$10000101$$

Comprobamos que está bien

$$2^0 + 2^2 + 2^7 = 133$$

Resumiendo:

signo	exponente	mantisa
0	10000101	000101111000000000000000

¿Cual es el ϵ de máquina? El ϵ de máquina es el número más pequeño que se le puede sumar a 1 y es

$$0,000000000000000000000001 \times 2^0 = 2^{-23} = 0,000000119209$$

¿Y el mayor entero que se puede almacenar de forma exacta?

El mayor entero que se puede representar con todos sus dígitos es

$$1,111111111111111111111111 \times 2^{23} + 1$$

$$1,000000000000000000000000 \times 2^{24} = 1677216$$

2. Un ordenador hipotético almacena números reales en formato de punto flotante con 10 bits. El primer bit se usa para el signo del número, el segundo bit para el signo del exponente, los siguientes tres bits para la magnitud del exponente, los últimos cinco bits para la magnitud de la mantisa y se utiliza el “bit escondido”. Cada segundo, el error entre 0,1 en base 10 y su representación binaria en 10 bits se acumula. Calcular el error acumulado en un día.

$$\begin{array}{l} \text{Decimal : } 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,8 \quad 0,6 \quad 0,2 \\ \text{Entera : } \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \end{array}$$

Por lo tanto el número es periódico y de la forma

$$0,000110011001100\dots$$

Si lo normalizamos

$$1,10011001100\dots \times 2^{-4}$$

y si solo almacenamos 5 dígitos de la mantisa

$$1,10011 \times 2^{-4}$$

que en base 10 es

$$1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} = 0,996094$$

Por lo tanto el error cometido es

$$(0,1 - 0,996094) \times 60 \times 60 \times 24 = 33,75$$

3. Sea la ecuación

$$te^{-t} + 1 = 0$$

Demostrar que en $[-1, 0]$ existe una única raíz.

Consideremos

$$f(t) = te^{-t} + 1.$$

Se tiene que $f(-1) = -1,71$ y $f(0) = 1$. Como la función es continua y tiene signo distinto en los extremos del intervalo $[-1, 0]$ existe al menos una raíz en dicho intervalo. Como además

$$f'(t) = e^{-t}(1 - t)$$

no se anula en $[-1, 0]$ (sólo se anula cuando $1 - t = 0$, es decir, para $t = 1$), dicha raíz es única.

¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo? ¿Por qué? Aproximar la raíz realizando dos iteraciones.

Sí porque la función es continua y tiene signo distinto en los extremos del intervalo.

iteración	a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$f(a)f(c) < 0 \rightarrow b = c$
1	-1	-0,5	0	-1,72	0,18	1	
2	-1	-0,75	-0,5				

y una aproximación de la raíz sería el último valor de $c = -0,75$.

Dar una cota del error.

Para el método de Bisección

$$E = |x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^k} = \frac{0 - (-1)}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Aproximar dicha raíz haciendo dos iteraciones con el método de Newton con $x_0 = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

En este caso

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{-x_k} + 1}{e^{-x_k}(1 - x_k)}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k + e^{x_k}}{(1 - x_k)}$$

Si $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 + e^{x_0}}{(1 - x_0)} = 0 - \frac{0 + e^0}{(1 - 0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 + e^{x_1}}{(1 - x_1)} = -1 - \frac{(-1) + e^{(-1)}}{(1 - (-1))} = -0,5775$$

(La solución es $\alpha = -0,5671$)