

Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2013

1. Dados los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$ de la función $f(x) = x^4 - x^2$

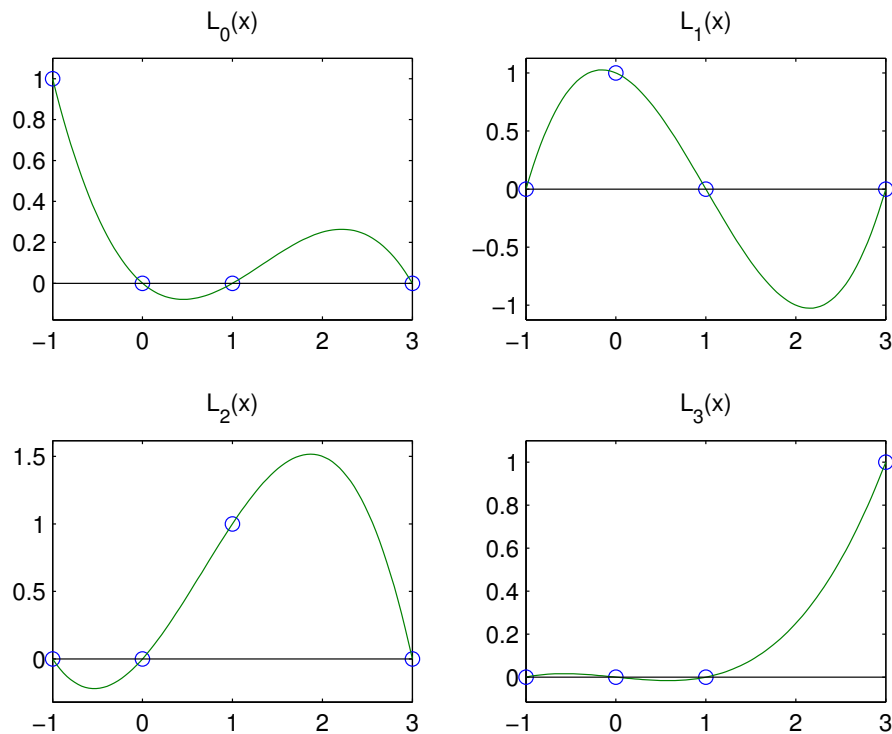
(a) Calcular los polinomios fundamentales de Lagrange y dibujarlos.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 3)} = -\frac{1}{8}x(x - 1)(x - 3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)(x - 3)}{(0 - (-1))(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{1}{3}(x + 1)(x - 1)(x - 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)(x - 3)}{(1 - (-1))(1 - 0)(1 - 3)} = -\frac{1}{4}(x + 1)x(x - 3)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)(x - 1)}{(3 - (-1))(3 - 0)(3 - 1)} = \frac{1}{24}(x + 1)x(x - 3)$$



(b) Calcular el polinomio interpolante por el método de Lagrange.

$$P_3(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x)$$

$$P_3(x) = 0 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) + 0 \cdot L_3(x) + 72 \cdot L_4(x)$$

$$P_3(x) = 72 \cdot L_4(x) = \frac{72}{24} (x+1)x(x-3)$$

$$P_3(x) = 3x^3 - 3x$$

2. Tenemos los siguientes datos del movimiento de un cuerpo

$t(\text{s})$	0	5	10	15	20
$v(\text{m/s})$	0	10	12	16	18

(a) ¿Cual será la velocidad a los 16s? Usar interpolación polinomial cuadrática con el polinomio interpolante en la forma de Newton.

Para interpolar con un polinomio de grado dos, necesitamos tres puntos. Los t más próximos a 16 son 10, 15 y 20. Además el intervalo $[10, 20]$ contiene a 16.

Para usar la notación habitual $x = t$ y $f(x) = v(t)$. Construimos la tabla de diferencias divididas con $x_0 = 10$, $x_1 = 15$ y $x_2 = 20$:

(b)

x	$f(x)$		
10	12		
		$\frac{12-16}{10-15} = \frac{4}{5}$	
15	16		$\frac{(4/5) - (2/5)}{10-20} = -\frac{1}{25}$
		$\frac{16-18}{15-20} = \frac{2}{5}$	
20	18		

Ya tenemos

$$f[x_0] = 12, \quad f[x_0, x_1] = \frac{4}{5}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{25}$$

Construimos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 12 + \frac{4}{5}(x - 10) - \frac{1}{25}(x - 10)(x - 15)$$

y entonces

$$P_2(16) = 12 + \frac{4}{5}(16 - 10) - \frac{1}{25}(16 - 10)(16 - 15) = 16.56 \text{ m/s}$$

(c) **¿Y la aceleración?**

La obtenemos como la derivada de la velocidad. En este caso como la derivada del polinomio que aproxima la velocidad:

$$\begin{aligned} P_2'(x) &= \frac{4}{5} - \frac{1}{25}(x - 15) - \frac{1}{25}(x - 10) \\ P_2'(16) &= \frac{4}{5} - \frac{1}{25}(16 - 15) - \frac{1}{25}(16 - 10) = 0.52 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

3. **Dada la función $f(x) = \cos x$ en $[-1, 1]$, calcular la parábola que aproxima de forma continua a la función utilizando la base de polinomios ortogonales $\{1, x, 1 - 3x^2\}$.**

$$\int_{-1}^1 \cos x dx = 1.6829, \quad \int_{-1}^1 x \cos x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x^2 \cos x dx = 0.4782$$

Para una base de polinomios $\{P_0, P_1, P_2\}$ el polinomio de aproximación es de la forma

$P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$ donde los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 son la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & \langle P_0, P_1 \rangle & \langle P_0, P_2 \rangle \\ \langle P_1, P_0 \rangle & \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_2 \rangle \\ \langle P_2, P_0 \rangle & \langle P_2, P_1 \rangle & \langle P_2, P_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, f(x) \rangle \\ \langle P_1, f(x) \rangle \\ \langle P_2, f(x) \rangle \end{pmatrix}.$$

Si los polinomios son ortogonales para el producto escalar utilizado se tiene que

$$\begin{pmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle P_1, P_1 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle P_2, P_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, f(x) \rangle \\ \langle P_1, f(x) \rangle \\ \langle P_2, f(x) \rangle \end{pmatrix},$$

y entonces

$$a_0 = \frac{\langle P_0, f(x) \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} \quad a_1 = \frac{\langle P_1, f(x) \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} \quad a_2 = \frac{\langle P_2, f(x) \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle}.$$

En este caso el producto escalar es

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \int_{-1}^1 g(x) h(x) dx.$$

Si hacemos los cálculos:

$$\begin{aligned}
 \langle P_0, f(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_0(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 1 \cos(x) dx = 1.6829 \\
 \langle P_1, f(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_1(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 x \cos(x) dx = 0 \\
 \langle P_2, f(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_2(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - 3x^2) \cos(x) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \cos(x) dx + 3 \int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx = 1.6829 - 3(0.4782) = 0.24814 \\
 \langle P_0, P_0 \rangle &= \int_{-1}^1 (P_0(x))^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = (x)_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2 \\
 \langle P_1, P_1 \rangle &= \int_{-1}^1 (P_1(x))^2 dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\
 \langle P_2, P_2 \rangle &= \int_{-1}^1 (P_2(x))^2 dx = \int_{-1}^1 (1 - 3x^2)^2 dx = \int_{-1}^1 (1 - 6x^2 + 9x^4) dx = \\
 &= \left(x - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^5}{5}\right)_{-1}^1 = 2 \left(1 - 2 + \frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5}.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$a_0 = \frac{\langle P_0, f(x) \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = 0.8415 \quad a_1 = \frac{\langle P_1, f(x) \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = 0 \quad a_2 = \frac{\langle P_2, f(x) \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = 0.1551$$

y

$$P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) = 0.8415 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0.1551 \cdot (1 - 3x^2)$$

y por lo tanto

$$P(x) = 0.9966 - 0.465263x^2$$

4. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, calcular una aproximación del gradiente

$$\nabla f(x_m, y_n) = (\partial_x f(x_m, y_n), \partial_y f(x_m, y_n))$$

para $(x_m, y_n) = (1, -1)$ con $h_x = h_y = 0.2$ utilizando fórmulas centradas.

La primera componente del vector será:

$$\begin{aligned}
 \partial_x f(x_m, y_n) &\approx \frac{f(x_m + h_x, y_n) - f(x_m - h_x, y_n)}{2h_x} = \frac{f(1 + 0.2, -1) - f(1 - 0.2, -1)}{2(0.2)} = \\
 &= \frac{((1 + 0.2)^2 + (-1)^2) - ((1 - 0.2)^2 + (-1)^2)}{2(0.2)} = \\
 &= \frac{2.44 - 1.64}{0.4} = \frac{0.8}{0.4} = 2.
 \end{aligned}$$

Y la segunda componente

$$\begin{aligned}\partial_x f(x_m, y_n) &\approx \frac{f(x_m, y_n + h_y) - f(x_m, y_n - h_y)}{2h_y} = \frac{f(1, -1 + 0.2) - f(1, -1 - 0.2)}{2(0.2)} = \\ &= \frac{((1)^2 + (-1 + 0.2)^2) - ((1)^2 + (-1 - 0.2)^2)}{2(0.2)} = \\ &= \frac{1.64 - 2.44}{0.4} = \frac{-0.8}{0.4} = -2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla f(1, -1) \approx (2, -2)$$

5. **Calcular la integral $\int_1^3 \ln x dx$ usando cinco nodos con la regla de Simpson compuesta.**

Para tener 5 nodos igualmente separados hemos de dividir el intervalo $[1, 3]$ en 4 trozos de longitud

$$h = \frac{b - a}{4} = \frac{3 - 1}{4} = 0.5.$$

Los nodos serán entonces

$$\begin{aligned}x_0 &= a = 1 \\ x_1 &= x_0 + h = 1 + 0.5 = 1.5 \\ x_2 &= x_1 + h = 1.5 + 0.5 = 2 \\ x_3 &= x_2 + h = 2 + 0.5 = 2.5 \\ x_4 &= x_3 + h = 2.5 + 0.5 = 3 = b\end{aligned}$$

Cada vez que aplicamos la fórmula simple de Simpson utilizamos 3 nodos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \ln x dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{x_4 - x_2}{6} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2h}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{2h}{6} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2h}{6} (f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)) = \\ &= \frac{2(0.5)}{6} (\ln 1 + 4(\ln 1.5 + \ln 2.5) + 2\ln 2 + \ln 3) = \\ &= \frac{1}{6} (0 + 4(0.4055 + 0.9163) + 2(0.6931) + 1.0986) = 1.2953\end{aligned}$$