

Computación Numérica

Primer Parcial - Marzo 2013

1. Una máquina almacena números en punto flotante en 9 bits. El primer bit se usa para el signo del número, los cuatro siguientes para el exponente sesgado y los últimos cuatro bits para la magnitud de la mantisa.
 - (a) Calcular el número $(101101100)_2$ en base 10.
 - (b) ¿Cual es el ϵ de máquina?
 - (c) ¿Y el mayor entero que se puede almacenar de forma exacta?

SOLUCIÓN:

(a)

9 bits:

1bit Signo: 1

4 bit Exponente sesgado: 0110

4 bits Mantisa: (1)1100

$$\text{sesgo} = 2^{4-1} - 1 = 7$$

$$\text{Exponente} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6$$

$$\text{Exponente} - \text{sesgo} = -1$$

Por lo tanto en base dos el número es $1.1100 \times 2^{-1} = 0.1110$.

Y en base 10 es $1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0.875$

Teniendo en cuenta el signo la solución es -0.875

(b)

El ϵ de máquina es el menor número (en valor absoluto) que se le puede sumar a 1.

El uno es 1.0000×2^0 y el menor número que se le puede sumar es $0.0001 \times 2^0 = 1.0000 \times 2^{-4} = 0.0625$

(c)

El mayor entero que se puede representar, el y todos los menores que él de forma exacta es, teniendo en cuenta los bits de mantisa disponibles y el bit escondido es:

$$11111 + 1 = 1.1111 \times 2^4 + 1 = 10.0000 \times 2^4 = 1.000 \times 2^5 = 2^5 \rightarrow 32$$

porque el siguiente entero no se puede representar de forma exacta.

2. Representar en base dos $\sqrt[3]{5} \cong 1.70998$ usando 2 bits para la parte entera y 3 bits para la parte fraccionaria. ¿Cuál es el error si redondeamos por truncamiento?

SOLUCIÓN:

La parte entera es 1 que se representa también como 1 en base dos.

Calculamos la parte decimal:

$$0.70998 \times 2 = 1.41996 \rightarrow 1$$

$$0.41996 \times 2 = 0.83992 \rightarrow 0$$

$$0.83992 \times 2 = 1.67984 \rightarrow 1$$

Y el número en base 2 es 01.101

Y en base 10 es $1 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 1.625$

Por lo tanto el error absoluto es $\text{Error} = |1.70998 - 1.625| = 0.08498$

3. Sea la función

$$h(t) = (t^3 - t^2) + \ln(1 + t)$$

- (a) Demostrar que esta función tiene al menos un extremo en $[-2, -1]$.
(b) Aproximar el extremo utilizando el Método de Newton. Utilizar como punto inicial $x_0 = -1$ y realizar 2 iteraciones.

SOLUCIÓN:

(a)

Buscamos las raíces de la derivada de h

$$h'(t) = -2t + 3t^2 + \frac{1}{1+t} = \frac{1 - 2t + t^2 + 3t^3}{1+t} = 0$$

Para ello ha de ser raíz del numerador, es decir, ha de ser raíz de:

$$f(t) = 1 - 2t + t^2 + 3t^3$$

Como $f(-2)f(-1) = (-15)(1) < 0$ y además f es continua, queda demostrado que existe al menos una raíz de f y por tanto de h' en $[-2, -1]$:

(b)

Si iteramos por Newton, usaremos la fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Como $f'(t) = -2 + 2t + 9t^2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - 2x_k + x_k^2 + 3x_k^3}{-2 + 2x_k + 9x_k^2}$$

Si $x_0 = -1$ entonces $x_1 = -1.2$

Y tenemos $x_1 = -1.2$. Entonces $x_2 = -1.1598$

4. Aproximar utilizando el Método de la secante $r = \sqrt[5]{5}$. Utilizar como puntos iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Realizar 2 iteraciones.

SOLUCIÓN:

Si tenemos $r = \sqrt[5]{5} \Rightarrow r^5 = 5 \Rightarrow r^5 - 5 = 0$ y nuestra función puede ser $f(r) = r^5 - 5$.

Si iteramos usando el método de la Secante usaremos la fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Por lo tanto

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^5 - 5)(x_k - x_{k-1})}{(x_k^5 - 5) - (x_{k-1}^5 - 5)}$$

Si $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ entonces $x_2 = 1.1290$

Si $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.1290$ entonces $x_3 = -1.2204$