Tema 2

Raíces de ecuaciones no lineales

1. Sea la ecuación
$$\frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}=0$$
   a) Demostrar que en $[-1,1]$ existe una única raíz.
   b) ¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?
   c) Aproximar la raíz haciendo tres iteraciones.
   d) Dar una cota del error cometido al calcular esta raíz
   (*raíz* $= -0{,}703467$, *cota error* $= 0{,}25$)

2. La ecuación $\cos x = 1$ tiene infinitas soluciones. Sin embargo ninguna de ellas puede ser calculada utilizando el método de bisección con $f(x) = \cos x - 1$ ¿Por qué? Dibujar una gráfica de la función $f(x)$ en $[-4\pi, 4\pi]$.

3. Sea la función
$$h(t) = \left(t^3 - t\right) e^{-t}$$
   a) Demostrar que esta función tiene un único extremo en $[3,4]$.
   b) ¿Se puede calcular por el método de bisección partiendo de dicho intervalo?
   c) Aproximar el mínimo haciendo tres iteraciones.
   d) Dar una cota del error cometido al calcular esta raíz
   (*raíz* $= 3{,}21432$, *cota error* $= 0{,}125$)

4. Demostrar que si tenemos la ecuación $f(x) = x - \cos x$:
   a) La ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1,2,3,4$, siendo
$$g_1(x) = \cos x \quad g_2(x) = \arccos x \quad g_3(x) = 2x - \cos x \quad g_4(x) = x - \frac{x - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$
   b) Hacer cuatro iteraciones con cada una de las funciones de iteración comenzando en $x_0 = 1$ ¿Convergen todas las sucesiones a la raíz?
   NOTA: recordar que para el argumento de las funciones trigonométricas directas se utilizan radianes
   (*raíz* $= 0{,}739085$)

5. Aproximar utilizando el Método de Newton $r = \sqrt{3}$. Utilizar como punto inicial $x_0 = 1$ y realizar 3 iteraciones.
(*raíz* = 1,73205)

6. Sea la función
$$h(t) = \left(2t^2 - t^3\right) + \ln(2 + t)$$
   a) Demostrar que esta función tiene al menos un extremo en $[1, 2]$.
   b) Aproximar el mínimo utilizando el Método de Newton. Utilizar como punto inicial $x_0 = 1$ y realizar 3 iteraciones.
   (*raíz* = 1,40314)

7. Aproximar utilizando el Método de Newton la raíz de la ecuación $x^2 = 0$. Utilizar como punto inicial $x_0 = 1$ y realizar 5 iteraciones. En cada iteración calcular
$$\left|\frac{x_{k+1} - r}{x_k - r}\right|$$
siendo r la raíz de la ecuación. ¿Qué orden de convergencia tiene el método?¿Por qué?

8. Aproximar utilizando el Método de la secante $r = \sqrt{3}$. Utilizar como puntos iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Realizar 3 iteraciones.
(*raíz* = 1,73205)

9. Demostrar que si tenemos la ecuación $f(x) = x^2 - x - 2$ y consideramos sus raíces en el intervalo $[1, 3]$:
   a) La ecuación $f(x) = 0$ tiene la misma raíz que $g_i(x) = x$ con $i = 1, 2, 3, 4$ siendo
$$g_1(x) = x^2 - 2 \quad g_2(x) = \sqrt{x + 2} \quad g_3(x) = 1 + \frac{2}{x} \quad g_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$$
   b) Hacer cuatro iteraciones con cada una de las funciones de iteración comenzando en $x_0 = 1$. ¿Convergen todas las sucesiones a la raíz?
   c) Hacer cuatro iteraciones utilizando el Método de Newton con el mismo punto inicial.
   d) Hacer cuatro iteraciones utilizando el Método de la secante con $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.
   e) ¿Cual de los tres métodos converge más rápido? ¿Por qué?
   (*raíz* = 2)

10. Dada una función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ se pide:
   a) Cómprobar que dicha función tiene un único extremo en el intervalo $[1, 2]$.
   b) Hacer tres iteraciones con el algoritmo de bisección y Método de la Secante partiendo de $[1, 2]$. Hacer tres iteraciones con el Método de Newton con $x_0 = 1$.
   c) Demostrar que la raíz r de $f'(x) = 0$ y de $g(x) = x$ en $[1, 2]$ es la misma, siendo $g(x) = \sqrt{\frac{2x+2}{3}}$. Realizar tres iteraciones con el método de Punto Fijo con $x_0 = 1$ para aproximar la raíz.
   (*raíz* = 1,21525)