

Integración numérica

Contenidos

- Introducción
- Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes simples
- Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes compuestas
- Fórmulas de cuadratura gaussianas
- Integración numérica con órdenes Matlab

Introducción

Fórmula de cuadratura

Las fórmulas de integración numérica o de cuadratura son de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_N)$$

donde $x_0, x_1, \dots, x_N$ (nodos) son $N + 1$ puntos distintos pertenecientes al intervalo $[a, b]$ y $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ (pesos) son números reales.

Fórmula interpolatoria

Si P_N es el polinomio que interpola a f en los puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_N(x)dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_N)$$

decimos que la fórmula de cuadratura es de tipo interpolatorio.

Grado de precisión

Una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión r si es exacta para

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^2, \dots, f(x) = x^r$$

pero no es exacta para $f(x) = x^{r+1}$

Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes simples

Son fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, eligiendo los puntos de interpolación (nodos de la fórmula) igualmente separados de una de las dos formas siguientes:

- **Fórmulas cerradas** Los límites de integración a y b son nodos de la fórmula.



- **Fórmulas abiertas** Ninguno de los límites de integración es nodo de la fórmula.



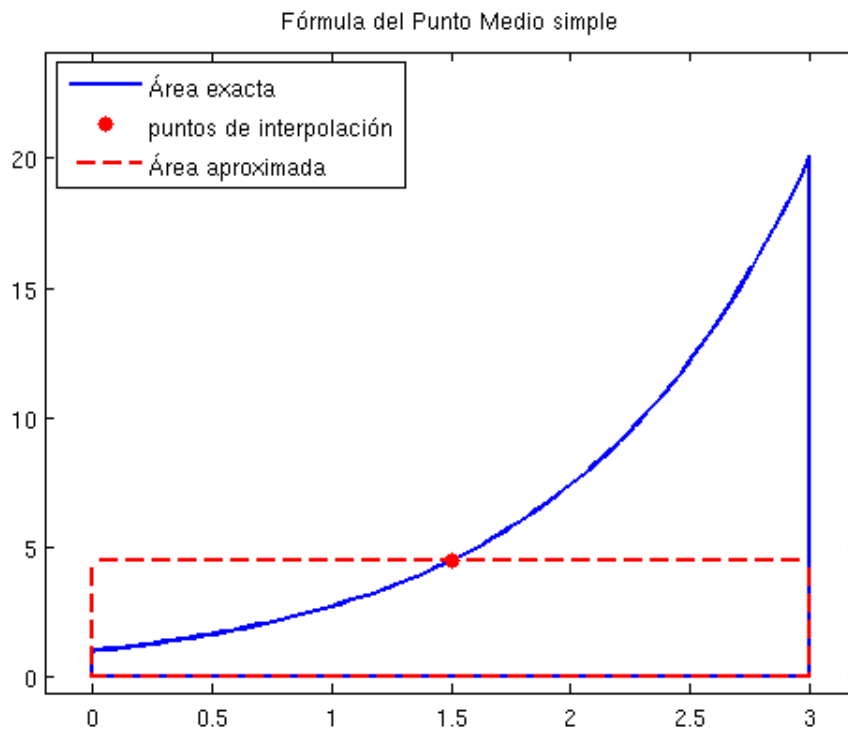
FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

La fórmula del punto medio es

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Usar la fórmula del punto medio para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado cero, es decir, una recta horizontal que pasa por el punto medio de la función. Sustituimos la función por una recta e integramos. Estamos entonces calculando el área de un rectángulo.

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;
[valor_aproximado valor_exacto]=punto_medio(f,a,b);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 13.4451
```

Ejercicio 1 Escribir una función llamada *punto_medio.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar y los extremos del intervalo de integración a y b que devuelve el valor aproximado utilizando la Regla del Punto Medio y el valor exacto.

Ejercicio 2 Integrando polinomios de distinto grado, decidir cual es el grado de precisión de la Fórmula del Punto Medio.

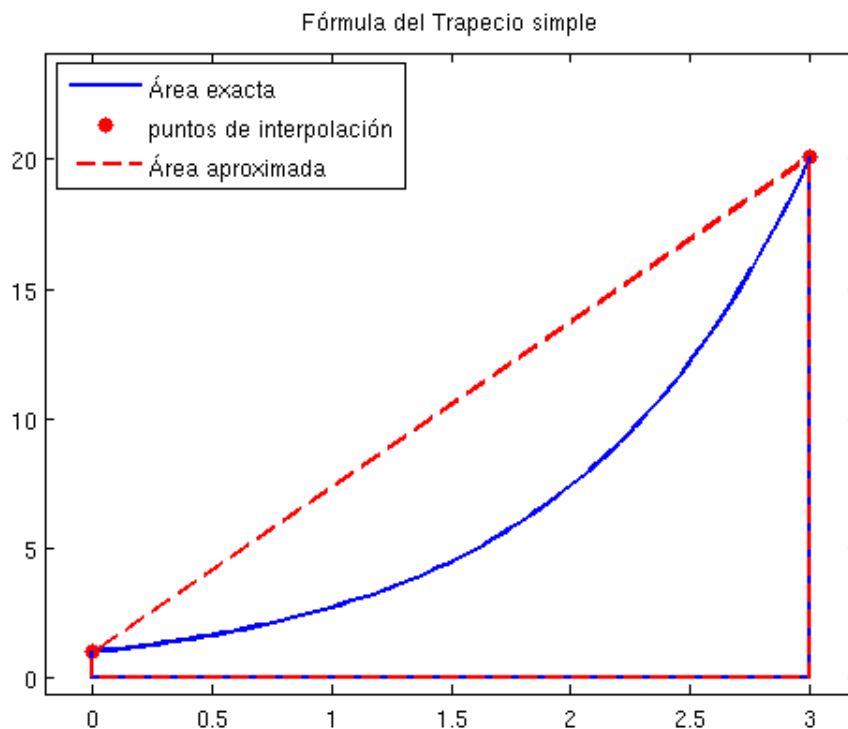
FÓRMULA DE LOS TRAPÉCIOS

La fórmula de los trapecios simple es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

Usar la fórmula de los trapecios para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado uno, que pasa por los puntos de la función de los extremos del intervalo. Es decir, sustituimos la función por una recta e integramos. Estamos entonces calculando el área de un trapecio.

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;
[valor_aproximado valor_exacto]=trapecio(f,a,b);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 31.6283
```

Ejercicio 3 Escribir una función llamada *trapecio.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar y los extremos del intervalo de integración a y b que devuelve el valor aproximado utilizando la Regla del Trapecio y el valor exacto.

Ejercicio 4 Integrando polinomios de distinto grado, decidir cual es el grado de precisión de la Fórmula de los Trapecios.

FÓRMULA DE SIMPSON

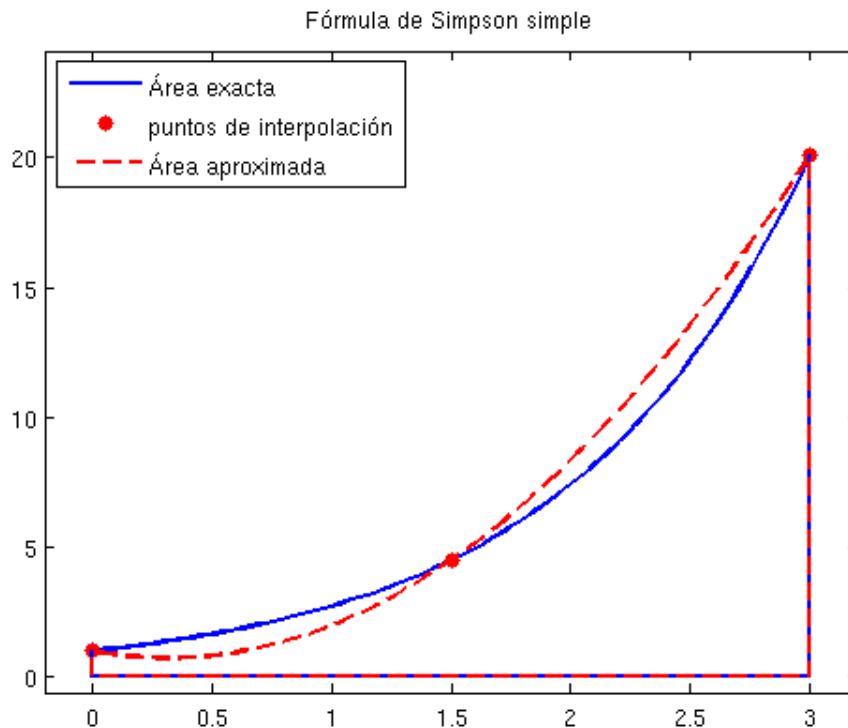
La fórmula de Simpson simple es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Usar la fórmula de Simpson para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado dos, que pasa por los puntos de la función de los extremos

y el punto medio del intervalo. Es decir, sustituimos la función por una parábola e integramos.

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;  
[valor_aproximado valor_exacto]=simpson(f,a,b);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...  
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855  
El valor aproximado es 19.5061
```

Ejercicio 4 Escribir una función llamada *simpson.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar y los extremos del intervalo de integración a y b que devuelve el valor aproximado utilizando la Regla de Simpson y el valor exacto.

Ejercicio 5 Integrando polinomios de distinto grado, decidir cual es el grado de precisión de la Fórmula de Simpson.

Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes compuestas

Aunque vemos que, en general, la fórmula de Simpson proporciona un error menor que la regla de los trapecios, y esta a su vez proporciona un error menor que la regla del punto medio, al aumentar el número de nodos de las fórmulas simples, el error no tiende a cero. Una alternativa para disminuir el error es aumentar el

número de nodos utilizando las fórmulas compuestas. Estas se obtienen dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y aplicando a cada uno de estos subintervalos una fórmula de cuadratura sencilla.

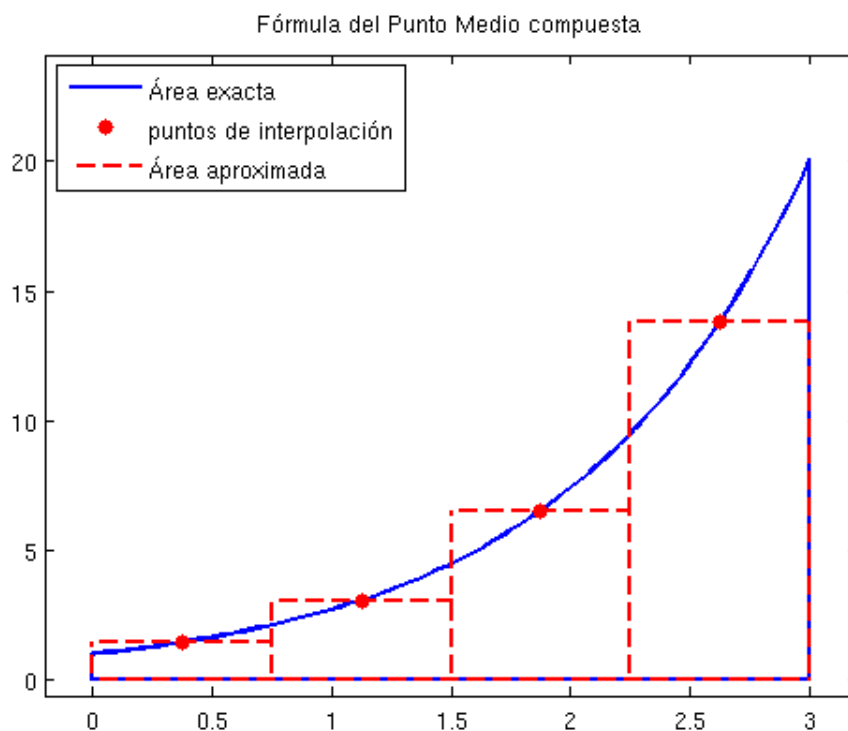
Sea

$$\bar{x}_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO COMPUESTA

$$\int_a^b f dx \approx h \sum_{n=1}^N f(\bar{x}_n)$$

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;N=4;
[valor_aproximado valor_exacto]=punto_medio_comp(f,a,b,N);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 18.6455
```

Ejercicio 7

- Escribir una función llamada *punto_medio_comp.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar, los extremos del intervalo de

integración a y b y el número de subintervalos que vamos a usar en la fórmula compuesta N y devuelve el valor aproximado utilizando la Regla del Punto Medio compuesta y el valor exacto.

- Hacer una tabla con los errores obtenidos al integrar

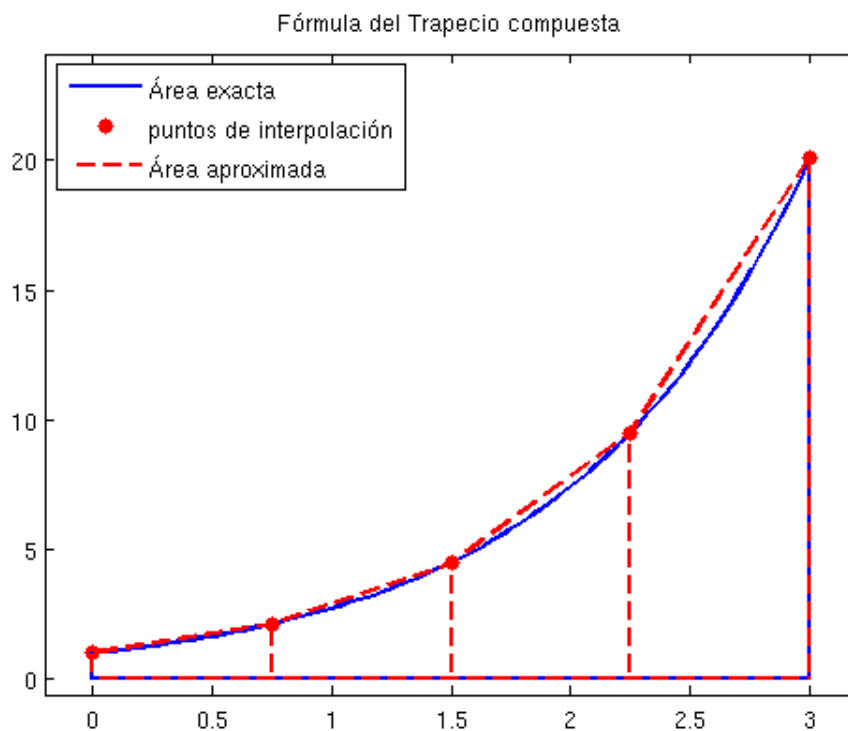
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

utilizando $N = 4, 8, 16, 32$ subintervalos.

REGLA DE LOS TRAPECIOS COMPUESTA

$$\int_a^b f dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n)$$

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;N=4;
[valor_aproximado valor_exacto]=trapecio_comp(f,a,b,N);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 19.9719
```

Ejercicio 8

- Escribir una función llamada *trapecio_comp.m* que tiene como argumentos de

entrada la función f a integrar, los extremos del intervalo de integración a y b y el número de subintervalos que vamos a usar en la fórmula compuesta N y devuelve el valor aproximado utilizando la Regla del Trapecio compuesta y el valor exacto.

- Hacer una tabla con los errores obtenidos al integrar

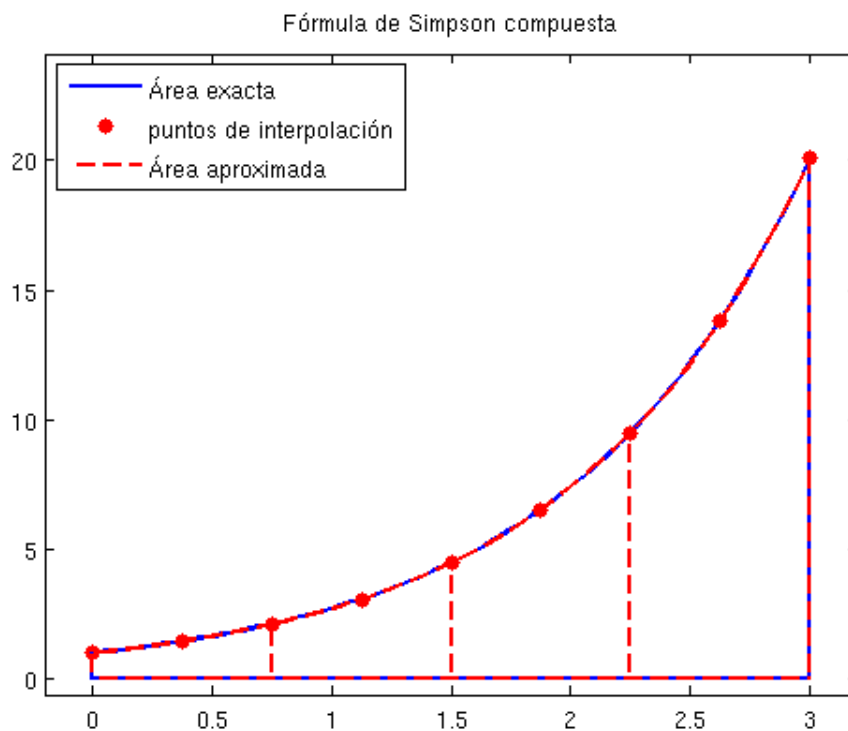
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

utilizando $N = 4, 8, 16, 32$ subintervalos.

FÓRMULA DE SIMPSON COMPUESTA

$$\int_a^b f dx \approx \frac{h}{6} \sum_{n=1}^N (f(x_{n-1}) + 4f(\bar{x}_n) + f(x_n))$$

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;N=4;
[valor_aproximado valor_exacto]=simpson_comp(f,a,b,N);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 19.0876
```

Ejercicio 9

- Escribir una función llamada *simpson_comp.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar, los extremos del intervalo de integración a y b y el número de subintervalos que vamos a usar en la fórmula compuesta N y devuelve el valor aproximado utilizando la Regla del Punto Medio compuesta y el valor exacto.
- Hacer una tabla con los errores obtenidos al integrar

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

utilizando $N = 4, 8, 16, 32$ subintervalos.

Fórmulas de cuadratura gaussianas

En la fórmula de cuadratura:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_N f(x_N)$$

¿Es posible calcular los pesos ω_i y los nodos x_i de forma que la precisión de la fórmula sea lo mayor posible? Sí, pero entonces los nodos no estarán equiespaciados.

Si $[a, b] = [-1, 1]$ los pesos y nodos son

n	w_i	x_i	n	w_i	x_i
1	2.0	0.0	8	0.1012285363	± 0.9602898565
2	1.0	± 0.5773502692		0.2223810345	± 0.7966664774
3	0.5555555556	± 0.7745966692		0.3137066459	± 0.5255324099
	0.8888888889	0.0		0.3626837834	± 0.1834346425
4	0.3478548451	± 0.8611363116	9	0.0812743883	± 0.9681602395
5	0.6521451549	± 0.3399810436		0.1806481607	± 0.8360311073
	0.2369268851	± 0.9061798459		0.2606106964	± 0.6133714327
	0.4786286705	± 0.5384693101		0.3123470770	± 0.3242534234
6	0.5688888889	0.0		0.3302393550	0.0
	0.1713244924	± 0.9324695142	10	0.0666713443	± 0.9739065285
	0.3607615730	± 0.6612093865		0.1494513492	± 0.8650633667
7	0.4679139346	± 0.2386191861		0.2190863625	± 0.6794095683
	0.1294849662	± 0.9491079123		0.2692667193	± 0.4333953941
	0.2797053915	± 0.7415311856		0.2955242247	± 0.1488743390
	0.3818300505	± 0.4058451514			
	0.4179591837	0.0			

Así, por ejemplo, la fórmula gaussiana para un punto es

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$

Para dos puntos

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-0.5773502692) + f(0.5773502692)$$

Para tres puntos

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx 0.555555556f(-0.774596692) + 0.888888889f(0) + 0.555555556f(0.774596692)$$

Y así sucesivamente.

Estos resultados se pueden generalizar a cualquier intervalo $[a, b]$ cambiando los x_i por y_i de acuerdo con la fórmula

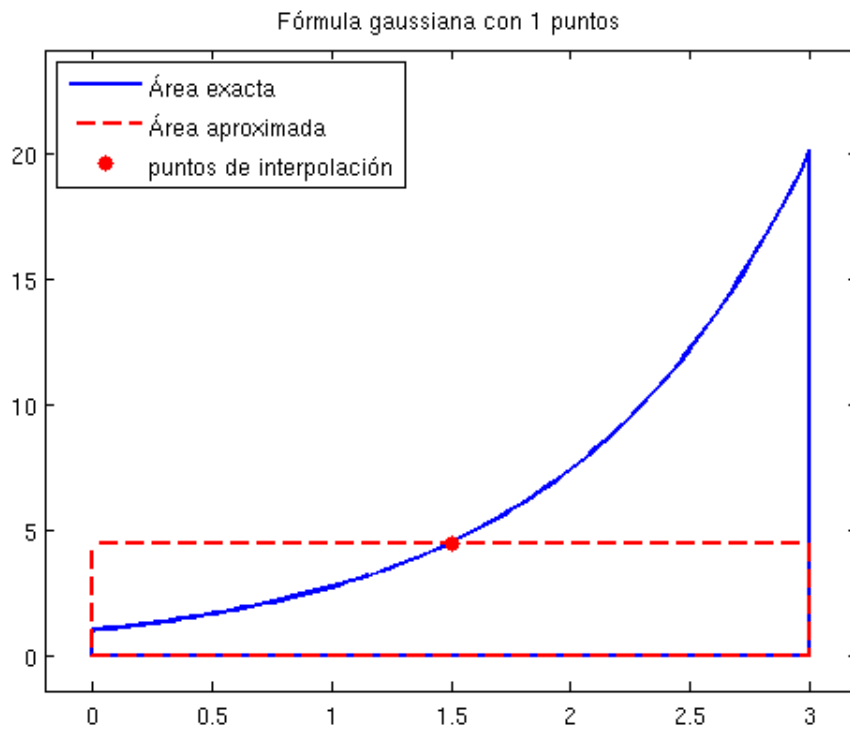
$$y_i = \frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}$$

Y entonces la fórmula de cuadratura es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (\omega_0 f(y_0) + \omega_1 f(y_1) + \dots + \omega_n f(y_n))$$

Ejercicio 10 Escribir una función llamada *gauss.m* que tiene como argumentos de entrada la función f a integrar, los extremos del intervalo de integración a y b y el número de puntos de interpolación n (que podrá ser igual a uno, dos o tres) y devuelve el valor aproximado de la integral utilizando la fórmula gaussiana correspondiente y que devuelve también el valor exacto.

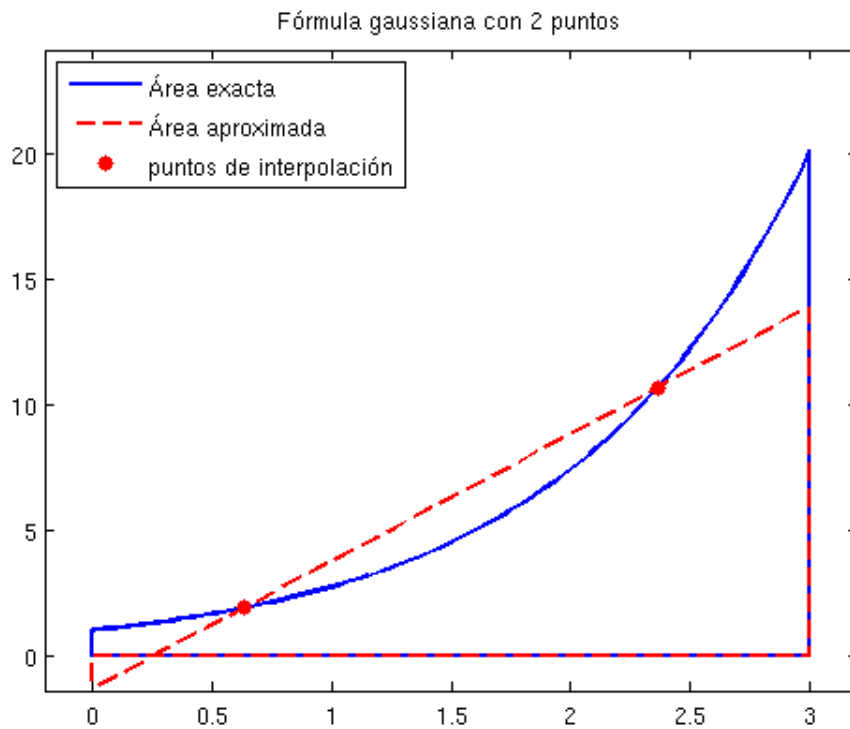
```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;n=1;
[valor_aproximado valor_exacto]=gauss(f,a,b,n);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 13.4451
```

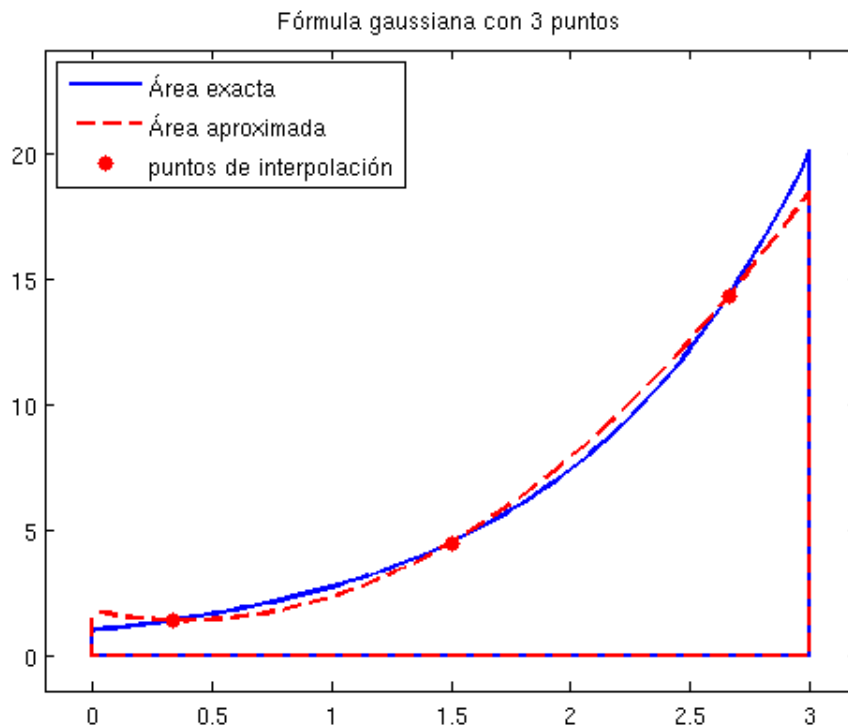
```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;n=2;
[valor_aproximado valor_exacto]=gauss(f,a,b,n);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...  
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855  
El valor aproximado es 18.8101
```

```
f=@(x) exp(x);a=0;b=3;n=3;  
[valor_aproximado valor_exacto]=gauss(f,a,b,n);
```



```
fprintf('El valor exacto es %7.4f\nEl valor aproximado es %7.4f\n',...
        valor_exacto, valor_aproximado)
```

```
El valor exacto es 19.0855
El valor aproximado es 19.0803
```

Ejercicio 11 Comparar cada fórmula de Gauss con la fórmula simple de Newton-Cotes que utiliza el mismo número de puntos de interpolación:

- ¿Para cual de las dos es el error mayor?
- ¿Cual tiene un grado de precisión mayor? Especificar el grado de precisión de cada fórmula.

Integración numérica con órdenes Matlab

Hay varias órdenes que utilizan diferentes métodos. Cada una es adecuada para distintos tipos de funciones. Por ejemplo

- `quad` puede ser más eficiente para precisiones bajas con integrandos que varíen mucho.
- `quadl` funciona mejor que `quad` con precisiones altas e integrandos sin variaciones abruptas.
- `quadgk` funciona mejor con precisiones altas e integrandos oscilatorios.
- `quadv` vectoriza `quad` para integrandos vectoriales.