

Aproximación

Escuela de Ingeniería Informática de Oviedo

Motivación

Aproximar una función f consiste en reemplazarla con una función más sencilla $\tilde{f}$.

Las dos razones principales para aproximar son:

- Realizar operaciones matemáticas con f de una forma más sencilla.
- Si conocemos f solo en un número finito de puntos x_i en el intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- **Interpolación:** Cuando $\tilde{f}(x_j) = f(x_j)$.
- **Ajuste:** Cuando se usa otro criterio de aproximación como, por ejemplo, los mínimos cuadrados.

Ejemplo: El polinomio de Taylor:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Por ejemplo, si $f(x) = \text{sen}(x)$, $x_0 = 0$ y $n = 5$ tenemos (para x pequeño, $x \approx 0$)

$$\text{sen}(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Un recordatorio de Álgebra Lineal

Sabemos de Álgebra Lineal que cualquier vector $\mathbf{v}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de una base.

Ejemplo: La base habitual de $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \equiv \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}.$$

En esta base, escribimos

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

¿Cómo calculamos v_k ? Simplemente usando el producto escalar y teniendo en cuenta que la base es **ortogonal** (de hecho, es ortonormal):

$$v_k = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle.$$

De esta manera, sólo necesitamos tres números para describir un vector en $\mathbb{R}^3$.

Ampliando la idea

¿Podemos hacer algo parecido con las funciones?

Ejemplo: Sean los polinomios de grado ≤ 2 , es decir, de la forma

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad \text{for } x \in [-1, 1].$$

Como podemos ver, están determinados por tres números reales ¡como los vectores!

Por lo tanto podemos escribir algo de la forma

$$q(x) = q_0p_0(x) + q_1p_1(x) + q_2p_2(x),$$

donde $p_k(x)$ forma una base de polinomios y q_k son las *coordenadas* de $q(x)$.
Mirando ambas expresiones de q el primer intento es

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, & q_0 &= a_0, \\ p_1(x) &= x, & q_1 &= a_1, \\ p_2(x) &= x^2, & q_2 &= a_2. \end{aligned}$$

Esto es correcto pero, ¿qué sucede con la propiedad

$$q_k = \langle q(x), p_k(x) \rangle$$

Ampliando la idea. Producto escalar de funciones

El producto escalar habitual de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k$.

Podemos intentar algo parecido para los polinomios

$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(x_k) q(x_k)$, siendo $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ una *partición* o *mall*a del intervalo $[-1, 1]$ con n *nodos*.

Pero n , aquí, es arbitrario. Podemos coger n tan grande como queramos. En el límite

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p(x_k) q(x_k) = \infty, \quad \text{que es MALO}$$

(pensar, por ejemplo, en $p(x) = q(x) = 1$).

Ampliando la idea. Producto escalar de funciones

Afortunadamente, podemos solucionar este problema facilmente.
 Simplemente multiplicando por la distancia entre x_k y x_{k+1} , es decir

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Habitualmente, tomamos una *mallla uniforme* en la que $\Delta x_k = \text{const.} \equiv \Delta x$.
 Entonces

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(x_k) q(x_k) \Delta x,$$

y, en el límite...

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p(x_k) q(x_k) \Delta x = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx, \quad \text{que es BUENO}$$

(pensar en cualquier función continua en $[-1, 1]$).

Ampliando la idea. Más problemas ...

Nuevo problema: La base no es ortogonal. Por ejemplo

$$\langle p_0(x), p_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 p_0(x)p_2(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Afortunadamente, otra vez, podemos solucionar este problema facilmente. Usando un método de ortogonalización (por ejemplo Gramm-Schmidt) para transformar la base en una ortonormal

$$p_0(x) = \frac{1}{2}, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

Así que, finalmente...

Hemos encontrado una forma de expresar cualquier polinomio de orden 2 definido en $[-1, 1]$, $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ como

$$q(x) = q_0p_0(x) + q_1p_1(x) + q_2p_2(x),$$

con

$$p_0(x) = \frac{1}{2}, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

y

$$q_k = \langle q(x), p_k(x) \rangle = \int_{-1}^1 q(x)p_k(x)dx.$$

Funciones periódicas

Ahora consideramos las **funciones periódicas** definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

que aparecen, en la práctica, cuando analizamos señales (sonido, imágenes).

Las funciones polinómicas no son periódicas y, por lo tanto, una base de polinomios ortogonales no es adecuada en este caso.

En su lugar, vamos a considerar una base de senos y cosenos

$$\cos(0x), \cos(x), \cos(2x), \dots, \sin(0x), \sin(x), \sin(2x), \dots$$

No es evidente que (casi) cualquier función de periodo 2π puede ser expresada como combinación lineal de senos y cosenos. Pero es cierto.

Teorema de Fourier

Si $f(x)$ es una función periódica de periodo 2π se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \dots + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \end{aligned}$$

y los coeficientes vienen dados por $a_0 = \langle f(x), 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$

$$a_k = \langle f(x), \cos(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \langle f(x), \sin(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

- La serie del lado derecho de la igualdad se llama **serie de Fourier** de f , y los coeficientes a_k, b_k , **coeficientes de Fourier**.
- La base de senos y cosenos es ortonormal en $[0, 2\pi]$, es decir

$$\langle \cos(k_1 x), \cos(k_2 x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k_1 x) \cos(k_2 x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } k_1 \neq k_2 \\ 1 & \text{if } k_1 = k_2 \end{cases}$$

$$\langle \cos(k_1 x), \sin(k_2 x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k_1 x) \sin(k_2 x) dx = 0, \quad \text{etc.}$$

- Los números enteros k se llaman **frecuencia o número de onda**.
- Los coeficientes de Fourier están relacionados con la **amplitud** de la onda.

Algo de notación

Gracias a la fórmula

$$\exp(ikx) = \cos(kx) + i\sin(kx),$$

podemos escribir la serie de Fourier de forma más compacta

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \exp(ikx), \quad \text{con } \hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx,$$

con las relaciones

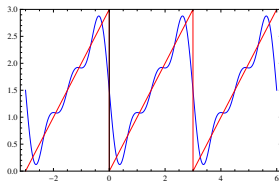
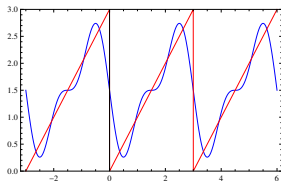
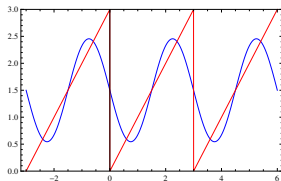
$$a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k}, \quad b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}).$$

¿Y la aproximación $\tilde{f}$?

La serie de Fourier es una representación exacta, no una aproximación.

Pero, como las series de Taylor, si sólo tomamos una suma finita obtenemos una (buena) aproximación.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-M}^M \hat{f}_k \exp(ikx) \approx f(x).$$



Aproximación de $f(x) = x$ en $[0, 3]$ de grados 1, 2 y 3 respectivamente.

Interpolación de Fourier

Para que la aproximación $\tilde{f}$ sea una **interpolación** de f necesitamos que

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j), \quad \text{para un conjunto finito de } x_s. \quad (1)$$

Sea la partición uniforme $[0, 2\pi]$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2\pi, \quad \text{con } x_j = \frac{2\pi j}{n}.$$

Entonces, las condiciones de interpolación (1) implican

$$\tilde{f}(x_j) = \sum_{k=-M}^M \hat{f}_k \exp(ikx_j) = f(x_j),$$

y de ahí determinamos la expresión discreta de $\hat{f}_k$

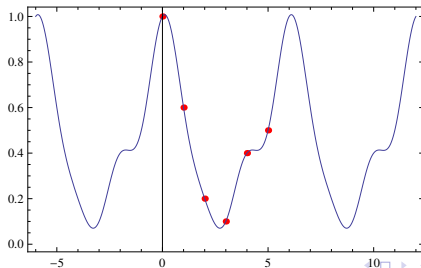
Interpolación de Fourier

Sea

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-M}^M \hat{f}_k \exp(ikx), \quad \hat{f}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{n+1}\right)$$

con

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$



Propiedades importantes

La transformada de Fourier tiene un camino de vuelta:

- Dados los valores de f en x_j (posición, tiempo, etc.), encontrar la frecuencia de los componentes (posición, tiempo, etc.)

$$\text{Directo } f \rightarrow \hat{f} : \quad \hat{f}_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{n+1}\right),$$

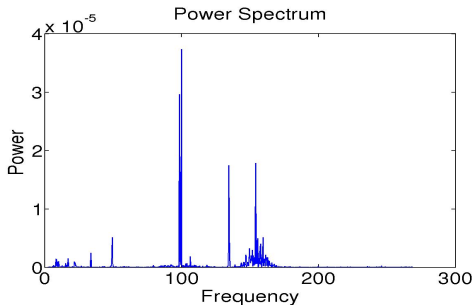
- Dada la frecuencia de los componentes $\hat{f}_k$ encontrar la función $f(x)$ que los genera

$$\text{Inverso } \hat{f} \rightarrow f : \quad f(x) \approx \sum_{k=-M}^M \hat{f}_k \exp(ikx).$$

Propiedades importantes

- El conjunto de coeficientes discretos de Fourier $\hat{f}_k$ es el **espectro discreto** de f .
- $S_k = |\hat{f}_k|^2$, es el **espectro de potencia** de f , que mide la frecuencia contenida en una señal.

Ruido de nevera



Propiedades importantes

- **El teorema del muestreo de Nyquist-Shannon.** Si f no contiene frecuencias mayores que ω está completamente determinada dando sus valores en una serie de puntos espaciados $1/(2\omega)$.

Ejemplo: Si $\omega \leq 5000\text{Hz}$ entonces es suficiente tomar muestras de f cada $1/10000$ segundos para tener una reconstrucción de f .

Perritos a 44100 Hz (882 kB)

Perritos a 11025 Hz (220 kB)

Perritos a 2756 Hz (55 kB)

Propiedades importantes

- **Conservación de la energía:** La energía discreta de la función definida en una partición x_j es

$$E = \left(\sum_{j=0}^n |f(x_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

Su transformada de Fourier conserva la energía,

$$E = \left(\sum_{k=-M}^M |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2}.$$