

Interpolación

Escuela de Ingeniería Informática de Oviedo

Contenidos

1 Introducción

2 Interpolación de Taylor

- Cálculo del polinomio de interpolación
- Error

3 Interpolación de Lagrange

- Cálculo del polinomio de interpolación
- Error

4 Interpolación polinómica a trozos

- Spline cúbico
- Error

Motivación

A menudo, en la solución de problemas, necesitamos el **valor de una función en varios puntos**.

Pero:

- puede ser **costoso** en términos de uso de procesador o tiempo de máquina (por ejemplo una función complicada que hay que evaluar muchas veces).
- es posible que **sólo** tengamos el valor de la función en **unos pocos puntos** (por ejemplo, si proceden de los datos de un sondeo).

Una posible solución es **sustituir esta función** complicada por otra más sencilla de evaluar.

Estas funciones más sencillas suelen ser **polinomios, funciones trigonométricas,...**

Interpolación

Datos:

- $n + 1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$
- $n + 1$ valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$
- $n + 1$ enteros $k_0, k_1, \dots, k_n$

Problema:

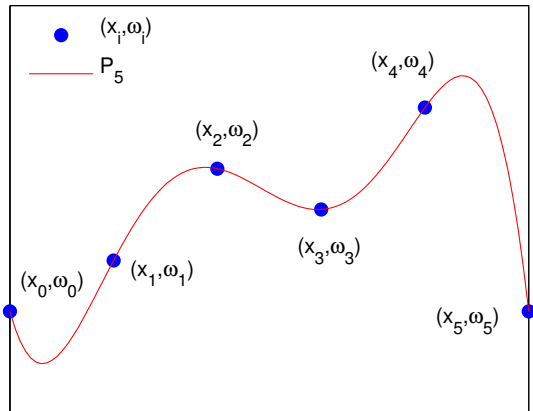
Buscamos una función P que verifique $P^{k_i}(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, \dots, n$.

Observaciones:

- $x_0, x_1, \dots, x_n$ se llaman **nodos de interpolación**
- $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ pueden ser los valores de una función f en los nodos:

$$\omega_i = f^{k_i}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Un ejemplo de interpolación



Interpolación polinómica

Si P es un **polinomio** o una **función polinómica a trozos** se habla de **interpolación polinómica**.

Ejemplos:

- 1 Interpolación de Taylor
- 2 Interpolación de Lagrange
- 3 Interpolación polinómica a trozos

Interpolación de Taylor

Datos:

- un punto x_0
- $n + 1$ valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$

Problema:

Hallar un polinomio P_n de grado $\leq n$ tal que

$$P_n(x_0) = \omega_0 \quad P'_n(x_0) = \omega_1 \quad P''_n(x_0) = \omega_2 \quad \dots \quad P_n^{(n)}(x_0) = \omega_n$$

El polinomio de Taylor

Hipótesis:

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es n veces derivable en $[a, b]$
- $x_0 \in [a, b]$
- $\omega_i = f^{(i)}(x_0)$ para $i = 0, 1, \dots, n$

Polinomio de Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

se llama **polinomio de Taylor de grado $\leq n$ relativo a f en x_0**

Interpolación de Taylor:

Aproximamos f por P_n en las proximidades del punto x_0

Acotación del error

Hipótesis:

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es $n + 1$ veces derivable en $[a, b]$ con derivada continua.
- $x_0 \in [a, b]$
- $\omega_i = f^{(i)}(x_0)$ para $i = 0, 1, \dots, n$

Acotación del error:

Si aproximamos la función f en un punto cercano a x_0 utilizando el polinomio de Taylor P_n el error cometido es:

$$f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

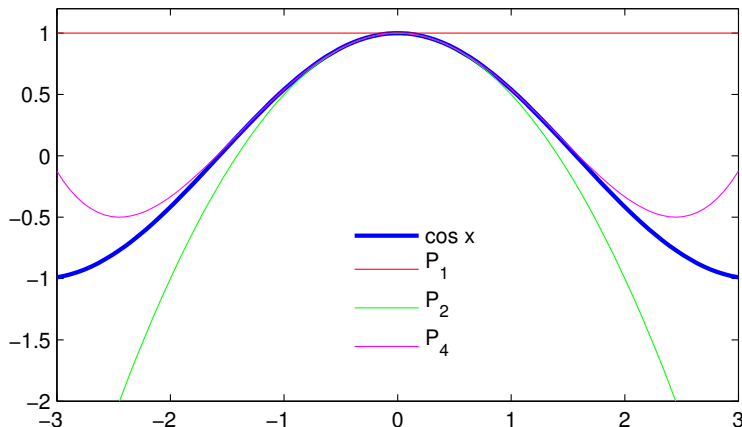
donde ξ_x es un punto que está entre x_0 y x

El **error** cumple

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Un ejemplo de interpolación de Taylor

Polinomios de Taylor para $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$



Interpolación de Lagrange

Datos:

- $n + 1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$
- $n + 1$ valores cualesquiera $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$

Problema:

Buscamos un polinomio P_n de grado $\leq n$ que verifique

$$P_n(x_0) = \omega_0 \quad P_n(x_1) = \omega_1 \quad P_n(x_2) = \omega_2 \quad \dots \quad P_n^{(n)}(x_n) = \omega_n$$

Interpolación de Lagrange

Interpolación de Lagrange lineal ($n = 1$)

Datos:

- 2 puntos distintos x_0, x_1
- 2 valores cualesquiera ω_0, ω_1

Problema:

Buscamos un polinomio P_1 de grado ≤ 1 que verifique

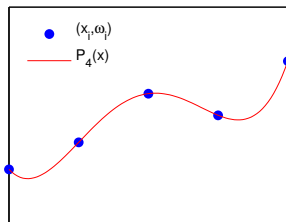
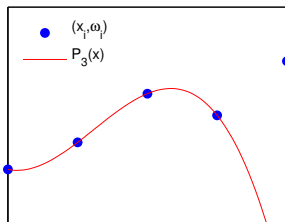
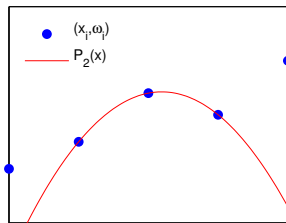
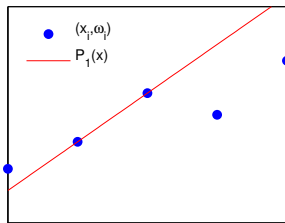
$$P_n(x_0) = \omega_0 \quad P_n(x_1) = \omega_1$$

Polinomio de interpolación de Lagrange:

Gráficamente, $y = P_1(x)$ es la recta que pasa por (x_0, ω_0) y (x_1, ω_1)

$$P_1(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{x_1 - x_0} (x_1 - x_0)$$

Un ejemplo de interpolación de Lagrange



Existencia y unicidad

Problema:

Buscamos un polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

que satisfaga las condiciones

$$P_n(x_0) = \omega_0 \quad P_n(x_1) = \omega_1 \quad P_n(x_2) = \omega_2 \quad \dots \quad P_n(x_n) = \omega_n \quad (1)$$

Las condiciones (1) son equivalentes a los coeficientes del polinomio sean solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad

La matriz de coeficientes del sistema es de tipo Vandermode:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Su determinante es

$$\det(A) = \prod_{0 \leq l < k \leq n} (x_k - x_l) \neq 0$$

Y el sistema tiene solución única y por lo tanto existe un único polinomio P_n que cumple las condiciones (1)

P_n es el **polinomio de interpolación de Lagrange** en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$

Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange

Motivación:

Para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange es suficiente con resolver un sistema de ecuaciones lineales. Pero haciéndolo de esta forma se pueden cometer grandes errores porque la matriz de Vandermonde está mal condicionada.

Formas de cálculo:

- Usando los polinomios fundamentales de Lagrange
- Usando las diferencias divididas

Cálculo mediante los polinomios fundamentales de Lagrange

Polinomios fundamentales:

Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, existe un único polinomio ℓ_i de grado $\leq n$ tal que $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$ (cero si $i \neq k$, uno si $i = k$):

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

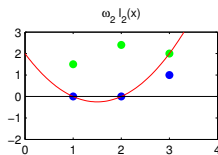
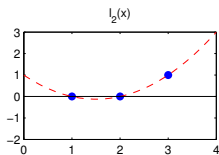
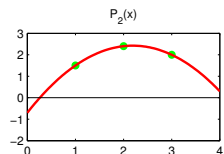
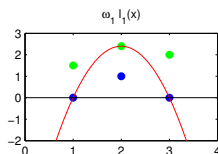
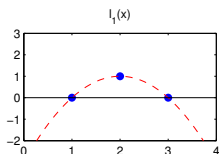
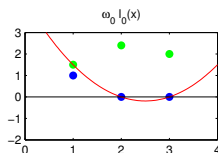
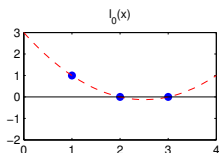
- $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ son los **polinomios fundamentales de Lagrange** de grado n

Fórmula de Lagrange:

El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ es

$$P_n(x) = \omega_0 \ell_0(x) + \omega_1 \ell_1(x) + \dots + \omega_n \ell_n(x)$$

Ejemplo del cálculo mediante los polinomios fundamentales de Lagrange



Cálculo mediante las diferencias divididas

Diferencias divididas:

- Diferencias divididas de orden 0

$$[\omega_i] = \omega_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Diferencias divididas de orden k ($k = 1, \dots, n$)

$$[\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{i+k}] = \frac{[\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{i+k-1}] - [\omega_{i+1}, \dots, \omega_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

$$i = 0, 1, \dots, n - k$$

Ejemplos:

- Diferencias divididas de orden 1:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}] = \frac{\omega_i - \omega_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

- Diferencias divididas de orde 2:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}, \omega_{i+2}] = \frac{[\omega_i, \omega_{i+1}] - [\omega_{i+1}, \omega_{i+2}]}{x_i - x_{i+1}} \quad i = 0, 1, \dots, n - 2$$

Cálculo mediante las diferencias divididas

Tabla de diferencias divididas:

En la práctica, el cálculo de las diferencias divididas se dispone como

x_0	ω_0	$[\omega_0, \omega_1]$	$[\omega_0, \omega_1, \omega_2]$	$\cdots$	$[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n]$
x_1	ω_1	$[\omega_1, \omega_2]$	$[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$	$\cdots$	
x_2	ω_2	$[\omega_2, \omega_3]$	$[\omega_2, \omega_3, \omega_4]$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_{n-1}	ω_{n-1}	$[\omega_{n-1}, \omega_n]$			
x_n	ω_n				

Cálculo mediante las diferencias divididas

Notación:

Si $\omega_i = f(x_i)$ con $i = 0, 1, \dots, n$

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = [f(x_i), \dots, f(x_{i+k})]$$

Fórmula de Newton:

El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ es

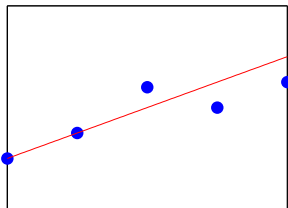
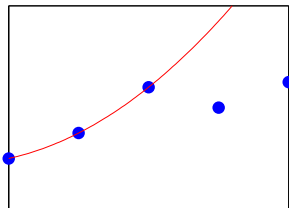
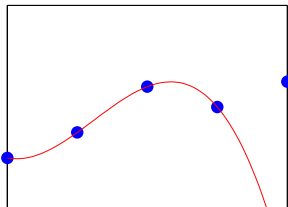
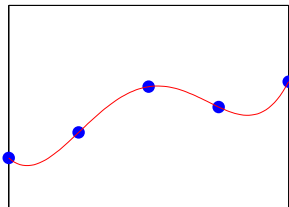
$$P_n(x) = [\omega_0] + [\omega_0, \omega_1](x - x_0) + [\omega_0, \omega_1, \omega_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Consecuencia:

Se pueden calcular $P_0, P_1, \dots, P_n$ sucesivamente, añadiendo cada vez un punto nuevo a los cálculos, como

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Ejemplo cálculo mediante las diferencias divididas

 $P_1(x)$  $P_2(x)$  $P_3(x)$  $P_4(x)$ 

Error

Hipótesis:

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es $n + 1$ veces derivable en $[a, b]$ con derivada continua.
- $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$
- $\omega_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$

Acotación del error:

Si aproximamos la función f en un punto a $x \in [a, b]$ utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange P_n el error cometido es:

$$f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!}$$

donde $\xi_x \in [a, b]$

El **error** cumple

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{y \in [a, b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| \frac{|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|}{(n+1)!}$$

Interpolación por splines

Motivación:

Si aumentamos el número de nodos:

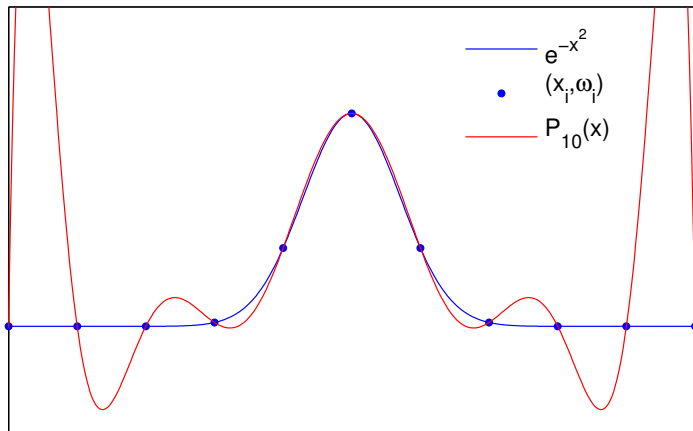
- Aumenta el grado del polinomio de interpolación de Lagrange y los polinomios de grados altos presentan muchas oscilaciones
- Debería mejorar la aproximación, pero esto sólo sucede si las derivadas de la función están acotadas uniformemente

Es decir, *si aumentamos el número de nodos la interpolación de Lagrange puede hacerse inestable y puede crecer el error.*

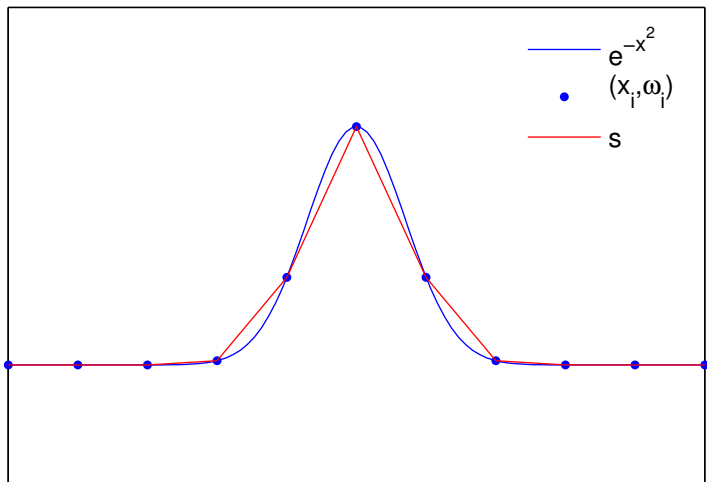
Estrategia:

Utilizar polinomios de grado bajo *a trozos*

Ejemplo: oscilación de los polinomios de Lagrange



Ejemplo interpolación a trozos



Interpolación por splines

Datos:

- $n + 1$ puntos distintos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$
- $n + 1$ valores cualesquiera $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$

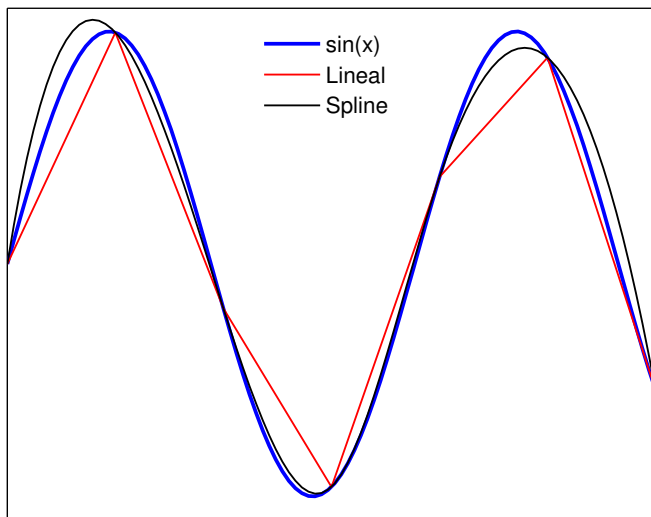
Problema:

Encontrar una función s tal que

- 1 s es una función continua derivable $p - 1$ veces en el intervalo $[x_0, x_n]$
 - 2 s es una función a trozos formada por los polinomios $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ que vamos a usar respectivamente en $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ y que son de grado menor o igual que p
 - 3 Los polinomios pasan por los nodos:

$$s(x_0) = \omega_0 \quad s(x_1) = \omega_1 \quad \dots \quad s(x_n) = \omega_n$$
- Puede probarse que este problema tiene solución
 - Cada solución s se llama **spline interpolador de orden p o p -spline** en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$
 - El spline más utilizado es el de orden 3, conocido como **spline cúbico**

Ejemplo spline cúbico



El spline cúbico

Definición:

Un **spline cúbico** es una función s tal que

- 1 s es 2 veces derivable en $[x_0, x_n]$ con derivada continua.
- 2 Cada uno de los polinomios $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ que componen s son de grado ≤ 3 .
- 3 Los polinomios pasan por los nodos:
$$s(x_0) = \omega_0 \quad s(x_1) = \omega_1 \quad \dots \quad s(x_n) = \omega_n$$

Observaciones:

- La expresión del spline cúbico s en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se determina a partir de los valores de s'' en x_i y x_{i+1}
- Los valores $s''(x_i)$ se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de matriz tridiagonal

Cálculo del spline cúbico

Cuestión:

Deducir una expresión del spline cúbico

Paso 1:

Por definición, s tiene derivada segunda continua en $[x_0, x_n]$

Por lo tanto s'' es continua y en particular

$$\begin{aligned}
 \omega_0'' &= s_0''(x_0) \\
 \omega_1'' &= s_0''(x_1) = s_1''(x_1) \\
 \omega_2'' &= s_1''(x_2) = s_2''(x_2) \\
 \dots &\quad \dots \quad \dots \\
 \omega_{n-1}'' &= s_{n-2}''(x_{n-1}) = s_{n-1}''(x_{n-1}) \\
 \omega_n'' &= s_{n-1}''(x_n)
 \end{aligned}$$

Cálculo del spline cúbico

Paso 2:

Los polinomios s_i son de grado ≤ 3 .

Por lo tanto s_i'' son de grado ≤ 1 , son rectas, con valores ω_i'' y ω_{i+1}'' en los extremos del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

Si aplicamos la forma de Lagrange a esta recta

$$s_i''(x) = \omega_i'' \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \omega_{i+1}'' \frac{x - x_i}{h_i}$$

siendo $h_i = x_{i+1} - x_i$

Paso 3:

Integrando cada uno de estos polinomios con respecto a x :

$$s_i'(x) = -\omega_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + \omega_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + C_i$$

donde C_i es la constante de integración

Cálculo del spline cúbico

Paso 4:

Integrado otra vez:

$$s_i(x) = \omega_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \omega_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + a_i(x_{i+1} - x) + b_i(x - x_i)$$

donde a_i y b_i son constantes de integración

Paso 5:

Deducimos a_i y b_i imponiendo las condiciones de interpolación

$$s_i(x_i) = \omega_i \quad s_i(x_{i+1}) = \omega_{i+1}$$

Y obtenemos

$$a_i = \frac{\omega_i}{h_i} - \omega_i'' \frac{h_i}{6} \quad b_i = \frac{\omega_{i+1}}{h_i} - \omega_{i+1}'' \frac{h_i}{6}$$

Conocidos los valores ω_i'' conocemos el spline cúbico

Cálculo del spline cúbico

Spline cúbico natural:

Se pueden seguir varias opciones para definir el spline cúbico de forma unívoca:

- añadir 2 ecuaciones de forma que el sistema tenga una única solución
- imponer el valor de 2 incógnitas

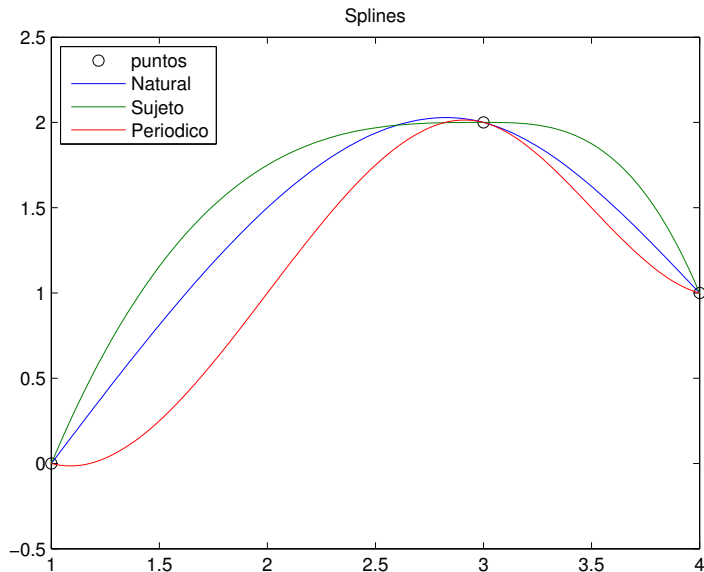
Si se imponen los valores de $\omega''_0 = 0$ y $\omega''_n = 0$, se llama **spline natural**

En este caso, los valores $\omega''_1, \dots, \omega''_{n-1}$ son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega''_1 \\ \omega''_2 \\ \vdots \\ \omega''_{n-2} \\ \omega''_{n-1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \Delta_1 - \Delta_0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{pmatrix}$$

con $\Delta_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i}$

Condiciones en los extremos



Error

Hipótesis:

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable 4 veces en $[a, b]$ con derivada continua.
- $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$

Acotación del error:

Si aproximamos la función f en un punto a $x \in [a, b]$ utilizando el spline cúbico natural s , el error cumple

$$|f(x) - s(x)| \leq C \left(\max_{i=0, \dots, n} h_i \right) \sup_{y \in [a, b]} |f^{(4)}(y)|$$

siendo C una constante independiente de f , de x y de $\max_{i=0, \dots, n} h_i$