Computación Numérica

Segundo Parcial - Mayo 2014

1. Dados los nodos:

x	0	1	2
y	1	0	2

Si escribimos el spline natural que los ajusta como

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{si } x \in [0, 1] \\ s_2(x) = e(x-1)^3 + f(x-1)^2 + g(x-1) + h & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

plantear las ecuaciones del sistema cuya solución son los coeficientes a, b, c, d, e, f, g y h . Especificar las condiciones aplicadas.

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

Condiciones de interpolación: la curva ha de pasar por los tres puntos. Por lo tanto:

$$s_1(0) = 1, \quad s_1(1) = 0, \quad s_2(1) = 0, \quad s_2(2) = 2.$$

Condiciones de continuidad: han de coincidir las derivadas primera y segunda en los puntos intermedios:

$$s_1'(1) = s_2'(1), \quad s_1''(1) = s_2''(1).$$

Y como hay 8 incógnitas y de momento sólo tenemos 6 condiciones (ecuaciones) imponemos dos más en los extremos. Como el spline es natural las condiciones adicionales son:

$$s_1''(0) = 0, \quad s_2''(2) = 0.$$

Calculamos

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3a(x-1)^2 + 2b(x-1) + c & \text{si } x \in [0, 1] \\ s_2'(x) = 3e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$
$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6a(x-1) + 2b & \text{si } x \in [0, 1] \\ s_2''(x) = 6e(x-1) + 2f & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

y las ecuaciones son:

1. $s_1(0) = 1 \implies -a + b - c + d = 1$
2. $s_1(1) = 0 \implies d = 0$
3. $s_2(1) = 0 \implies h = 0$
4. $s_2(2) = 2 \implies e + f + g + h = 2$
5. $s_1'(1) = s_2'(1) \implies c = g$
6. $s_1''(1) = s_2''(1) \implies 2b = 2f$
7. $s_1''(0) = 0 \implies -6a + 2b = 0$
8. $s_2''(2) = 0 \implies 6e + 2f = 0$

Y tenemos un sistema lineal de ocho ecuaciones para calcular ocho incógnitas.

2. La ley de Hooke es $F(x) = kx$ donde F es la fuerza aplicada al resorte, k la constante del muelle y x la variación en la longitud del resorte.

x (mm)	8	15	23	30
Fuerza (g)	5.8	11.6	17.4	23.2

Calcular la recta que pasa por el origen y que minimiza los errores cuadráticos. Deducir la fórmula empleada para calcular la recta a partir de los errores cuadráticos. Calcular la constante k de este muelle. La recta que pasa por el origen será de la forma:

$$F(x) = kx$$

Queremos calcular la recta que minimiza la suma de los errores cuadráticos:

$$E(k) = \sum_{k=1}^4 (F(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^4 (k \times x_k - y_k)^2.$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E(k) &= (F(8) - 5,8)^2 + (F(15) - 11,6)^2 + (F(23) - 17,4)^2 + (F(30) - 23,2)^2 = \\ &= (k \times 8 - 5,8)^2 + (k \times 15 - 11,6)^2 + (k \times 23 - 17,4)^2 + (k \times 30 - 23,2)^2 \end{aligned}$$

Para hallar el error mínimo derivamos:

$$\begin{aligned} E'(k) &= \sum_{k=1}^4 2(k \times x_k - y_k)x_k = \sum_{k=1}^4 2(k \times x_k^2 - y_k x_k) = 0 \\ k \sum_{k=1}^4 x_k^2 - \sum_{k=1}^4 y_k x_k &= 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$k = \frac{\sum_{k=1}^4 y_k x_k}{\sum_{k=1}^4 x_k^2}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E'(k) &= 2(k \times 8 - 5,8) \times 8 + 2(k \times 15 - 11,6) \times 15 + 2(k \times 23 - 17,4) \times 23 + 2(k \times 30 - 23,2) \times 30 \\ &= 2k(8 \times 8 + 15 \times 15 + 23 \times 23 + 30 \times 30) - 2(8 \times 5,8 + 15 \times 11,6 + 23 \times 17,4 + 30 \times 23,2) = 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$k = \frac{8 \times 5,8 + 15 \times 11,6 + 23 \times 17,4 + 30 \times 23,2}{8 \times 8 + 15 \times 15 + 23 \times 23 + 30 \times 30} = \frac{1316,6}{1718} = 0,766 \text{gr/mm}$$

Y la recta de aproximación es

$$F(x) = 0,766x$$

3. Supongamos que tenemos tres puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de una función f , de forma que $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ con $0 < h < 1$. Construir una fórmula de derivación de tipo interpolatorio que aproxime $f'(x_0)$ o $f'(x_2)$ y que utilice estos tres puntos.

Si usamos un polinomio de interpolación de f de 2º grado en x_0, x_1, x_2 , siendo $y_j = f(x_j)$, el polinomio de interpolación en la forma de Newton es:

$$p(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1)$$

con

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$[y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_0, y_1] - [y_1, y_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1}{2h} \left(\frac{y_0 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_2}{h} \right) = \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2).$$

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad [y_0, y_1, y_2] = \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2).$$

Si derivamos $p(x)$

$$f'(x) \approx p'(x) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x - x_0) + (x - x_1)),$$

y para el caso particular del punto x_0

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1)),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2)(-h),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}.$$

Y si aproximamos la derivada en el punto x_2

$$f'(x_2) \approx p'(x_2) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_2 - x_0) + (x_2 - x_1)),$$

$$f'(x_2) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2)(2h + h),$$

$$f'(x_2) \approx \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}.$$