

Formulario de Señales y Sistemas

Series geométricas y aritméticas

$\sum_{m=0}^N r^m = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$ con $r \neq 1$	$\sum_{m=1}^N r^m = \frac{r-r^{N+1}}{1-r}$ con $r \neq 1$	$\sum_{m=-N}^N r^m = \frac{r^{-N}-r^{N+1}}{1-r}$ con $r \neq 1$
$a_m = a_{m-1} + d \Rightarrow \sum_{m=N_1}^{N_2} a_m = \frac{a_{N_1} + a_{N_2}}{2}$		

Distribuciones

Definición: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$	
$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$	$f(x)\delta'(x-x_0) = f(x_0)\delta'(x-x_0) - f'(x_0)\delta(x-x_0)$
$x\delta(x) = 0$	$x\delta'(x) = -\delta(x)$
$f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)$	$f(x) * \delta'(x-x_0) = f'(x-x_0)$
$\delta(ax-x_0) = \frac{1}{ a }\delta(x-\frac{x_0}{a})$	$\delta'(ax-x_0) = \frac{1}{ a }\frac{1}{a}\delta'(x-\frac{x_0}{a})$
$\delta(x) = \delta(-x)$	$\delta'(x) = -\delta'(-x)$

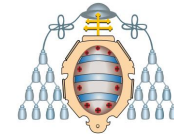
Desarrollo en serie de Fourier (DSF) - Variable continua

Se define $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$

Propiedades	
$\alpha f_0(x) + \beta g_0(x)$	$\alpha a(m) + \beta b(m)$
$f_0(x-x_0)$	$a(m)e^{-jm\xi_0 x_0}$
$f_0(x)e^{jm_0\xi_0}$	$a(m-m_0)$
$f_0^*(x)$	$a^*(-m)$
$f_0(-x)$	$a(-m)$
$f_0(\alpha x)$, con $\alpha > 0$	$a(m)$ (periodo $X'_0 = \frac{X_0}{\alpha}$)
$f_0(x) * g_0(x)$	$X_0 a(m)b(m)$
$f_0(x)g_0(x)$	$a(m) * b(m)$
$\frac{d}{dx}f_0(x)$	$jm\xi_0 a(m)$
$\frac{d^n}{dx^n}f_0(x)$	$(jm\xi_0)^n a(m)$
$\int f_0(x)dx$ ¹	$\frac{1}{jm\xi_0} a(m)$
$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = X_0 \langle a(m), b(m) \rangle$	
$f_0(x) = f_0^*(x)$ (real)	$a(m) = a^*(-m)$
$f_0(x) = f_0(-x)$ (par)	$a(m) = a(-m)$
$f_0(x) = -f_0(-x)$ (impar)	$a(m) = -a(-m)$

Pares transformados	
$f_0(x)$	$a(m)$
$e^{jk\xi_0 x}$	$\delta(m-k)$
$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)e^{jm\xi_0 x}$	$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x)e^{-jm\xi_0 x} dx$
K	$K\delta(m)$
$\cos(k\xi_0 x)$	$\frac{1}{2} [\delta(m-k) + \delta(m+k)]$
$\sin(k\xi_0 x)$	$\frac{1}{2j} [\delta(m-k) - \delta(m+k)]$
$\Pi_{0,\Delta}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x-kX_0}{\Delta}\right)$	$\frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right)$
$\Lambda_{0,\Delta}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{x-kX_0}{\Delta}\right)$	$\frac{\Delta}{2X_0} \text{sinc}^2\left(m\pi \frac{\Delta}{2X_0}\right)$
$\delta_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-kX_0)$	$\frac{1}{X_0}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-kX_0) = \frac{1}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x}$ (fórmula de la suma de Poisson)	

¹sólo si $\langle f_0(x) \rangle = a(0) = 0$



Transformada de Fourier - Variable continua

Propiedades	
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$
$f(x - x_0)$	$F(\xi)e^{-j\xi x_0}$
$f(x)e^{j\xi_0 x}$	$F(\xi - \xi_0)$
$f^*(x)$	$F^*(-\xi)$
$f(-x)$	$F(-\xi)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a }F\left(\frac{\xi}{a}\right)$
$f(x) * g(x)$	$F(\xi)G(\xi)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}F(\xi) * G(\xi)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$j\xi F(\xi)$
$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$	$(j\xi)^n F(\xi)$
$x^n f(x)$	$j^n \frac{d^n F(\xi)}{d\xi^n}$
$\int_{-\infty}^x f(y)dy$	$\frac{1}{j\xi}F(\xi) + \pi F(0)\delta(\xi)$
$F(x)$	$2\pi f(-\xi)$
$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\xi), G(\xi) \rangle$	
$f(x) = f^*(x)$ real	$F(\xi) = F^*(-\xi)$
$f(x) = f(-x)$ par	$F(\xi) = F(-\xi)$
$f(x) = -f(-x)$ impar	$F(\xi) = -F(-\xi)$

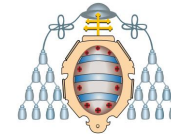
Pares transformados	
$f(x)$	$F(\xi)$
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{j\xi x}d\xi$	$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\xi x}dx$
$\delta(x)$	1
$\delta(x - x_0)$	$e^{-j\xi x_0}$
$u(x)$	$\pi\delta(\xi) + \frac{1}{j\xi}$
$\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right)$	$\Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)$
$\frac{\Delta}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}x\right)$	$\Pi\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)$
$\Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right)$	$\frac{\Delta}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta}{4}\xi\right)$
$e^{-\alpha x}u(x), \Re\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\xi}$
$xe^{-\alpha x}u(x), \Re\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\xi)^2}$
$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha x}u(x), \Re\{\alpha\} > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\xi)^n}$
$e^{j\xi_0 x}$	$2\pi\delta(\xi - \xi_0)$
K	$2\pi K\delta(\xi)$
$\cos(\xi_0 x)$	$\pi[\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi + \xi_0)]$
$\sin(\xi_0 x)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\xi - \xi_0) - \delta(\xi + \xi_0)]$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)e^{jm\xi_0 x}$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\delta(\xi - m\xi_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX_0)$	$\frac{2\pi}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - m\xi_0)$
$\Pi_{0,\Delta}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - kX_0}{\Delta}\right)$	$\frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right)\delta(\xi - m\xi_0)$

Desarrollo en serie de Fourier (DSF) - Variable discreta

Se define $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$.

Propiedades	
$\alpha x_0(n) + \beta y_0(n)$	$\alpha a(m) + \beta b(m)$
$x_0(n - n_0)$	$a(m)e^{-jm\Omega_0 n_0}$
$x_0(n)e^{jM\Omega_0 n}$	$a(m - M)$
$x_0^*(n)$	$a^*(-m)$
$x_0(-n)$	$a(-m)$
$\begin{cases} x_0(n/p) & n \text{ mult. } p \\ 0 & n \text{ no mult. } p \end{cases}$	$\frac{1}{p}a(m)$
$x_0(n) * y_0(n)$	$N_0 a(m)b(m)$
$x_0(n)y_0(n)$	$\sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k)b(k - m)$
$x_0(n) - x_0(n - 1)$	$(1 - e^{-jm\Omega_0})a(m)$
$\sum_{k=-\infty}^n x_0(k)$ req. $a(0) = 0$	$\frac{1}{(1 - e^{-jm\Omega_0})}a(m)$
$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = N_0 \langle a(m), b(m) \rangle$	
$x_0(n) = x_0^*(n)$ real	$a(m) = a^*(-m)$
$x_0(n) = x_0(-n)$ par	$a(m) = a(-m)$
$x_0(n) = -x_0(-n)$ impar	$a(m) = -a(-m)$

Pares transformados	
$x_0(n)$	$a(m)$
$e^{jp\Omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - p - kN_0)$
$x_0(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} a(m)e^{jm\Omega_0 n}$	$a(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n)e^{-jm\Omega_0 n}$
$\cos(p\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - p - kN_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m + p - kN_0)$
$\sin(p\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - p - kN_0) - \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m + p - kN_0)$
K	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} K\delta(m - kN_0)$
$\delta_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN_0)$	$\frac{1}{N_0}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_{2N+1}(n - kN_0)$	$\frac{1}{N_0} \frac{\sin(m\Omega_0(N + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{m\Omega_0}{2})}$
$a(n)$	$\frac{1}{N_0} x_0(-m)$



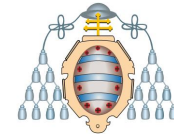
Transformada de Fourier - Variable discreta

Propiedades	
$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$	
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$
$x(n - n_o)$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_o}$
$x(n)e^{j\Omega_o n}$	$X(\Omega - \Omega_o)$
$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
$x(-n)$	$X(-\Omega)$
$f_0(x) \longleftrightarrow a(m)$ DSF-VC $x(n) = a(-n) \longleftrightarrow X(\Omega) = f_0(\Omega)$ TF-VD con $X_0 = 2\pi$	
$x(n/p)$	$X(p\Omega)$
$x(n) * y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$
$x(n) - x(n-1)$	$(1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$
$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} X(\Omega) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$nx(n)$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
$\langle x(n), y(n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X(\Omega), Y(\Omega) \rangle$ (Parseval)	
$x(n) = x^*(n)$ (real)	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
$x(n) = x(-n)$ (par)	$X(\Omega) = X(-\Omega)$
$x(n) = -x(-n)$ (impar)	$X(\Omega) = -X(-\Omega)$

Pares transformados	
$x(n)$	$X(\Omega)$
$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
$\Pi_{2N+1}(n)$	$\frac{\sin((N + \frac{1}{2})\Omega)}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$
$a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$(n+1) a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
$\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^p}$
K	$2\pi K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)$
$\sin(\Omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\Omega - m\Omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN_0)$	$\frac{2\pi}{N_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_{2N+1}(n - kN_0)$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\Omega - m\Omega_0)$

Transformada de Laplace

Propiedades		
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	Al menos $R_F \cap R_G$
$f(x - x_o)$	$F(s) e^{-sx_o}$	R_F
$f(x) e^{s_o x}$	$F(s - s_o)$	R_F desplazada
$f^*(x)$	$F^*(s^*)$	R_F
$f(-x)$	$F(-s)$	R_F reflejada
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F(\frac{s}{a})$	R_F escalada
$f(x) * g(x)$	$F(s)G(s)$	Al menos $R_F \cap R_G$
$\frac{df(x)}{dx}$	$sF(s)$	Al menos R_F
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$s^n F(s)$	Al menos R_F
$\int_{-\infty}^x f(y) dy$	$\frac{1}{s} F(s)$	Al menos $R_F \cap \Re\{s\} > 0$
$-xf(x)$	$\frac{dF(s)}{ds}$	R_F



Pares transformados		
$f(x)$	$F(s)$	ROC
$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{sx} ds$	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$	-
$\delta(x)$	1	$\forall s$
$\delta(x - x_o)$	e^{-sx_o}	$\forall s$
$\delta^{(n)}(x)$	s^n	$\forall s$
$\pm u(\pm x)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} \geq 0$
$xu(x)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} u(\pm x)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} \geq 0$
$\pm e^{-\alpha x} u(\pm x)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} \geq -\alpha$
$\pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} u(\pm x)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} \geq -\alpha$
$\cos(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{s}{s^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{\xi_0}{s^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{-\alpha x} \cos(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
$e^{-\alpha x} \sin(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{\xi_0}{(s+\alpha)^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$

Se asume $\alpha \in \mathbb{R}$.

Transformada Z

Propiedades		
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	Al menos $R_X \cap R_Y$
$x(n - n_o)$	$X(z)z^{-n_o}$	R_X (¿origen?)
$x(n)e^{j\Omega_0 n}$	$X(ze^{-j\Omega_0})$	R_X
$x(n)z_0^n$	$X(\frac{z}{z_0})$	$ z_0 R_X$
$x(n)a^n$	$X(\frac{z}{a})$	$ a R_X$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_X
$x(-n)$	$X(1/z)$	$1/R_X$
$x(n/p)$	$X(z^p)$	$[R_X]^{\frac{1}{p}}$
$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	Al menos $R_X \cap R_Y$
$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos R_X
$\sum_{p=-\infty}^n x(p)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Al menos $R_X \cap z > 1$
$nx(n)$	$-\frac{dX(z)}{dz}$	R_X

Pares transformados		
$x(n)$	$X(z)$	ROC
$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{ z } X(z)z^{n-1} dz$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	-
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n - n_o)$	z^{-n_o}	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{z^{-2}-2z^{-1}\cos\Omega_0+1}$	$ z > 1$
$\sin(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\Omega_0}{z^{-2}-2z^{-1}\cos\Omega_0+1}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1}a\cos\Omega_0}{a^2z^{-2}-2az^{-1}\cos\Omega_0+1}$	$ z > a $
$a^n \sin(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1}a\sin\Omega_0}{a^2z^{-2}-2az^{-1}\cos\Omega_0+1}$	$ z > a $