

Aplicación de la Transformada de Fourier a la resolución de circuitos electrónicos

1. Objetivos

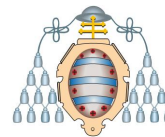
Esta práctica sigue una estructura similar a la anterior, comprendiendo dos partes bien diferenciadas. En primer lugar, se verá una implementación numérica de la transformada de Fourier, de modo que el alumno tome contacto con algunas de las problemáticas que suelen aparecer cuando se calcula la TF mediante un ordenador (u otro dispositivo digital como por ejemplo un osciloscopio digital).

En la segunda parte se busca ilustrar una de las principales aplicaciones de la transformada de Fourier, que es la resolución de ecuación diferenciales (así como ecuaciones integrales e integro-diferenciales). Para ello, se hará el análisis de circuitos electrónicos compuestos por componentes lineales (resistencias, condensadores, bobinas, etc.). Para ello, se proponen una serie de ejercicios, relacionados entre sí. Además, se hará una pequeña introducción a la distorsión de señales permitiendo analizar cuando un sistema “deforma” una señal.

2. Implementación de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier suele implementarse mediante el algoritmo conocido como *Fast Fourier Transform*. No obstante, los detalles de dicho algoritmo exceden los objetivos de la asignatura. En esta sesión, se hará uso de rutinas basadas en un flujo similar al visto en la práctica anterior (véase los Algoritmos 1 y 2).

! Puesto que el flujo de cálculo es similar al visto anteriormente para el DSF, no se repetirá la implementación de las ecuaciones de análisis y síntesis. El alumno puede utilizar las funciones `fourier_transform.m` y `inverse_fourier_transform.m` para tal fin.



input : Vector x con los valores x en los cuales $f(x)$ es evaluada.
input : Vector f con los valores de la función evaluados en x .
input : Vector x_i con los puntos ξ en los cuales $F(\xi)$ es evaluada.
output: Vector F con los valores de la transformada de Fourier $F(\xi)$ a las frecuencias angulares x_i .

```

1 Inicializar F con ceros           %F = zeros(1, length(xi));
2 foreach elemento xi0 de el vector xi do
3   | integrand  $\leftarrow f(x)e^{-j\xi_0 x}$ ;
4   | F(xi0)  $\leftarrow$  Valor de la integral de trapz(x, integrand);
5 end
    
```

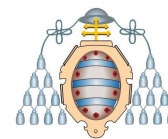
Algoritmo 1: Pseudocódigo para la ecuación de análisis.

input : Vector x_i con los valores ξ en los cuales $F(\xi)$ es evaluada.
input : Vector F con los valores de la transformada de Fourier $F(\xi)$ a las frecuencias angulares x_i .
input : Vector x conteniendo los valores x donde $f(x)$ será evaluada.
output: Vector f con los valores de la función evaluada en x .

```

1 Inicializar f con ceros           %f = zeros(1, length(x));
2 foreach elemento x0 de el vector x do
3   | integrand  $\leftarrow \frac{1}{2\pi} F(\xi)e^{j\xi x_0}$ ;
4   | f(x0)  $\leftarrow$  Valor de la integral de  $\frac{1}{2\pi}$  trapz(xi, integrand);
5 end
    
```

Algoritmo 2: Pseudocódigo para la ecuación de síntesis.



TAREA	Haciendo uso de las rutinas <code>fourier_transform.m</code> y <code>inverse_fourier_transform.m</code>, realice las siguientes tareas: 1. Calcule numéricamente la TF de $f(x) = \Pi(x)$ y compare el resultado con el teórico. Se recomienda utilizar un vector x truncado al rango $[-5, 5]$ con 2001 puntos y un vector ξ en el rango $[-20, 20]$ con 201 puntos. 2. Usando los mismos vectores de la tarea anterior, recupere la señal $f(x)$ a partir del valor $F(\xi)$. 3. Calcule numéricamente la TF de $f(x) = \cos(x)$ y compare el resultado con el teórico. Se recomienda utilizar un vector x truncado al rango $[-5, 5]$ con 201 puntos y un vector ξ en el rango $[-20, 20]$ con 2001 puntos. ¿A qué se deben las diferencias? 4. Calcule, de nuevo, la TF de $f(x) = \cos(x)$ y compare el resultado con el teórico. Esta vez use un rango vector ξ en el rango $[-200, 200]$ con 2001 puntos. ¿Observa alguna diferencia nueva? 5. Calcule, de nuevo, la TF de $f(x) = \cos(x)$ y compare el resultado con el teórico. Esta vez use un rango vector ξ en el rango $[-200, 200]$ con 2001 puntos y un vector x truncado al rango $[-5, 5]$ con 151 puntos. ¿Observa alguna diferencia nueva?
-------	---

Las diferencias que observa en las dos últimas tareas son debidas al muestreo de la señal, el cual genera réplicas del espectro cada $\frac{2\pi}{\Delta x}$ como se estudiará más adelante en la asignatura y, junto con el efecto del truncamiento del dominio de integración, son dos de los efectos que más afectarán al cálculo de la transformada de Fourier numéricamente.

3. Análisis de circuitos eléctricos alimentados con entradas arbitrarias

A continuación se guiará al alumno a través de un proceso en el que se describe un método para resolver circuitos electrónicos compuestos por componentes lineales (resistencias, bobinas, condensadores, etc.). Este desarrollo es principalmente *teórico* pero requiere el uso del ordenador para la resolución de ciertas partes que no tienen solución analítica.

3.1. Ecuaciones de Kirchoff en el dominio frecuencial

TAREA	1. Expresar las leyes de Kirchoff (suma de las corrientes en un nodo y suma de las tensiones en un lazo, ver Figura 1) en el dominio espectral, es decir, en términos de $I(\omega)$ y $V(\omega)$. 2. Observe que las ecuaciones de Kirchoff mantienen el mismo formato en el dominio temporal y espectral.
-------	---

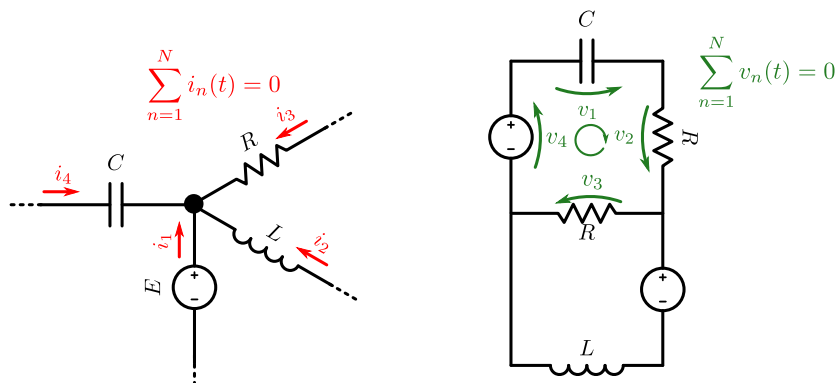
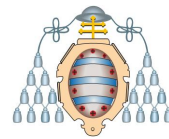


Figura 1: Leyes de Kirchoff.

3.2. Ecuaciones de diversos componentes en el dominio frecuencial

Sabemos que las ecuaciones que rigen el comportamiento de resistencias, condensadores y bobinas son las siguientes:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

TAREA

1. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, exprese las ecuaciones anteriores en el dominio espectral.
2. Observe que el cociente $\frac{V(\omega)}{I(\omega)}$ se corresponde con la *impedancia* del componente correspondiente.

3.3. Análisis de circuitos eléctricos

Puesto que (a) las ecuaciones de Kirchoff siguen siendo válidas en el dominio frecuencial, y (b) tal y como ocurría en circuitos formados sólo por resistencias, la corriente es proporcional a la tensión, tenemos pues que los circuitos eléctricos se pueden resolver como si estuviésemos manejando “resistencias” que en este caso tomarán los valores: R , $j\omega L$ y $\frac{1}{j\omega C}$.

La observación anterior es la que nos permite analizar cualquier circuito en términos de las impedancias con las cuales ya estamos familiarizados de cursos anteriores.

Realizaremos un análisis básico, pero ilustrativo, utilizando el circuito mostrado en la figura 2 donde $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$. Definiremos como entrada es $v_s(t)$ y como salida es $v_c(t)$:

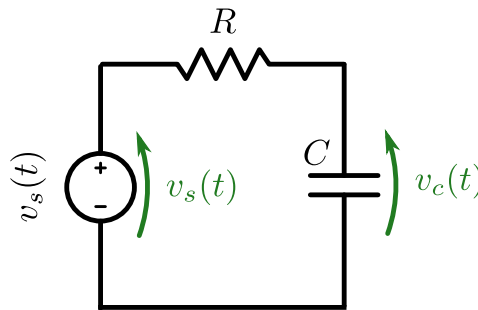
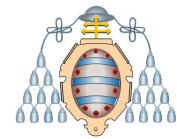


Figura 2: Circuito RC.

TAREA

1. Calcule, de manera analítica, la función de transferencia del sistema $H(\omega) = \frac{V_c(\omega)}{V_s(\omega)}$. Obtenga y represente su módulo y fase.
2. ¿El sistema atenúa las altas frecuencias o las bajas?

Los resultados obtenidos hasta ahora, están en concordancia con los resultados ya conocidos para régimen senoidal permanente. Sin embargo, es importante observar que la ecuación obtenida nos permite resolver el circuito para cualquier señal de entrada, siempre y cuando conozcamos su transformada de Fourier. Veámoslo con varios ejemplos:

TAREA

3. Compruebe que, en el caso de que la señal de entrada sea un escalón $v_s(t) = u(t)$, el espectro de $V_c(\omega) = H(\omega)V_s(\omega)$ coincide con el espectro de la solución teórica para la carga de un condensador: $v_c(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$.

Se recomienda resolver esta parte de manera analítica. Para ello, calcule primero el espectro analítico usando las expresiones exactas de $H(\omega)$ y $V_s(\omega)$. Después, calcule analíticamente la TF de $v_c(t)$. Finalmente, compruebe que ambas expresiones son idénticas.

4. Con ayuda de un *ordenador*, dibuje la tensión $v_c(t)$ en caso de que la señal de entrada sea $v_s(t) = \Pi\left(\frac{t}{0,5}\right)$ y $v_s(t) = e^{-10000t^2}$.

En este caso, se recomienda que calcule el espectro de manera teórica y que luego calcule la TF inversa mediante técnicas numéricas (haciendo uso de las funciones que se le proporcionan).

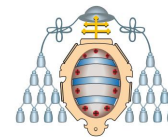


Se recomienda que utilice un vector de frecuencias entre -1 kHz y 1 kHz con paso de 1 Hz. Para el vector de tiempos, puede optar por un vector entre $-0,5$ s y $0,5$ s, con un paso de 1 ms.

OPCIONAL

5. Repita los apartados 1, 2 y 4 si el condensador es reemplazado por una bobina de valor $L = 30$ mH.

Aunque esta técnica de resolución de circuitos eléctricos (y la subyacente ecuación diferencial) se haya ilustrado para un circuito básico. Un procedimiento idéntico se puede realizar para circuitos más complejos: 1) obtención de la función de transferencia usando teoría



de circuitos convencional; 2) cálculo (analítico o numérico) de la TF de la señal de entrada; 3) producto en el dominio frecuencial para obtener el espectro de la señal de salida; 4) transformada inversa de Fourier.

4. Análisis de la sonda de un osciloscopio

Para ilustrar la potencia del resultado anterior, se considerará el análisis de un elemento de uso común cuya análisis es frecuentemente ignorado: la sonda de un osciloscopio.

La sonda de un osciloscopio tiene por objetivo transferir, sin ningún tipo de distorsión (es decir, sin deformar la señal), la señal desde el extremo de la sonda a la entrada del osciloscopio. El osciloscopio idealmente debería comportarse como una resistencia R_i de valor muy alto (típicamente $1\text{M}\Omega$) para alterar lo menos posible el circuito bajo prueba. Esta configuración ideal se muestra en la figura 3a.

Sin embargo, en la práctica existen una serie de dificultades:

- La sonda, para poder apantallar el ruido, está formada por un cable coaxial, el cual introduce una capacidad parásita C_{coax} en paralelo. Esta capacidad depende de la longitud del cable y es del orden de 100 pF/m .
- Además, el osciloscopio también presenta una capacidad parásita C_i de entre 10 pF y 25 pF . Tanto la impedancia interna R_i como la capacidad parásita C_i suelen venir especificadas por el fabricante del osciloscopio.

Esta configuración *no* ideal se muestra en la figura 3b. De aquí en adelante fijaremos los siguientes valores para hacer el análisis: $R_i = 1\text{ M}\Omega$, $C_i = 25\text{ pF}$ y $C_{coax} = 150\text{ pF}$. Además, supondremos que el coaxial introduce una cierta resistencia $R_{coax} \approx 15\text{ }\Omega$.

4.1. Análisis de la sonda de un osciloscopio en modo 1x

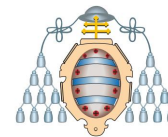
Para entender el efecto de la sonda sobre las señales, analizaremos como se comporta una sonda ante una entrada con variaciones rápidas como, por ejemplo, $v_i(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)$

1. Calcule la función de transferencia $H(\omega) = \frac{V_{osc}(\omega)}{V_i(\omega)}$. Represente su módulo y fase.
2. Represente, con ayuda del ordenador, la señal medida por el osciloscopio $v_{osc}(t)$ para el caso $\Delta = 500\text{ ms}$.

! Se recomienda que utilice un vector de frecuencias entre -1 kHz y 1 kHz con paso de 1 Hz . Para el vector de tiempos, puede optar por un vector entre $-0,5\text{ s}$ y $0,5\text{ s}$, con un paso de 1 ms . Recuerde que $V_i(\omega) = \mathbf{TF}\left\{\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right\} = \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\omega\right)$.

3. Repita el apartado anterior para el caso $\Delta = 0,5\text{ ms}$.

! Se recomienda que utilice un vector de frecuencias entre -500 kHz y 500 kHz con paso de 50 Hz . Para el vector de tiempos, puede optar por un vector entre -2 ms y 2 ms , con un paso de $10\text{ }\mu\text{s}$.



Observará que las señales apenas se distorsionan, salvo por la posible aparición del fenómeno de Gibbs debido a la simulación numérica.

4.2. Análisis de la sonda de un osciloscopio en modo 10x a baja frecuencia

La sonda analizada hasta ahora se corresponde a la sonda más sencilla que no atenúa la señal a frecuencias bajas y, por ello, se denomina sonda 1x. Aunque estas sondas son muy prácticas en infinidad de situaciones, a veces la impedancia interna de 1 MΩ no es suficiente para evitar perturbar el circuito. Además, esta impedancia se ve muy reducida a altas frecuencias pues el condensador tenderá a funcionar como un corto y, consecuentemente, existe gran probabilidad de perturbar el circuito al introducir la sonda. Por ello, es habitual que muchas sondas incluyan también un modo conocido como modo 10x (aunque pueden existir también más modos, los cuales funcionan de manera similar). Para seleccionar entre ambos modos, las sondas incluyen normalmente un interruptor.

El modo 10x añade dos nuevos elementos al sistema: 1) una resistencia en serie $R_{10x} = 9\text{ M}\Omega$; 2) un condensador variable (*trimmer*) cuya capacidad C_{10x} puede ser cambiada mediante un destornillador. Esta nueva configuración se muestra en la figura 3c. Observe que en esta nueva configuración, la resistencia del coaxial se ha eliminado ($R_{coax} = 0\ \Omega$) pues es, en general, despreciable frente al resto de efectos que introducen estos nuevos elementos.

Suponiendo que la sonda del osciloscopio está funcionando en modo 10x:

TAREA

1. Calcule la función de transferencia $H(\omega) = \frac{V_{osc}(\omega)}{V_i(\omega)}$.
2. Suponiendo que el nuevo condensador tiene un efecto despreciable a frecuencias bajas ($|Z| = \frac{1}{\omega C_{10x}} \rightarrow \infty$), represente, con ayuda del ordenador, la señal medida por el osciloscopio $v_{osc}(t)$ para el caso $\Delta = 500\text{ ms}$ (mantenga el resto de parámetros de aquella simulación). ¿Qué diferencias observa con el caso anterior en el que se usaba el modo 1x?
3. Repita el apartado anterior, ignorando nuevamente el condensador variable, para el caso $\Delta = 0,5\text{ ms}$ (mantenga el resto de parámetros de aquella simulación).

Habrás observado que: a) estas sondas presentan, a bajas frecuencias, una resistencia de 10 MΩ, lo cual da mayores posibilidades de que el circuito no se perturbe; b) la sonda, incluso a bajas frecuencias, introduce una atenuación de x10 la cual debe ser compensada por software en el osciloscopio; c) la sonda, si no se utiliza un condensador variable, presenta una fuerte distorsión incluso para frecuencias medias. En la siguiente sección veremos como se puede utilizar este condensador variable para combatir la distorsión.

4.3. Distorsión de señales

Se dice que un sistema no distorsiona una señal si la salida tiene la misma forma que la entrada:

$$g(t) = Kf(t - t_0)$$

es decir, el sistema a lo sumo retardará la señal y modificará su amplitud, pero su forma se preservará. Este tipo de sistemas se conocen habitualmente como sistemas *sin distorsión*.

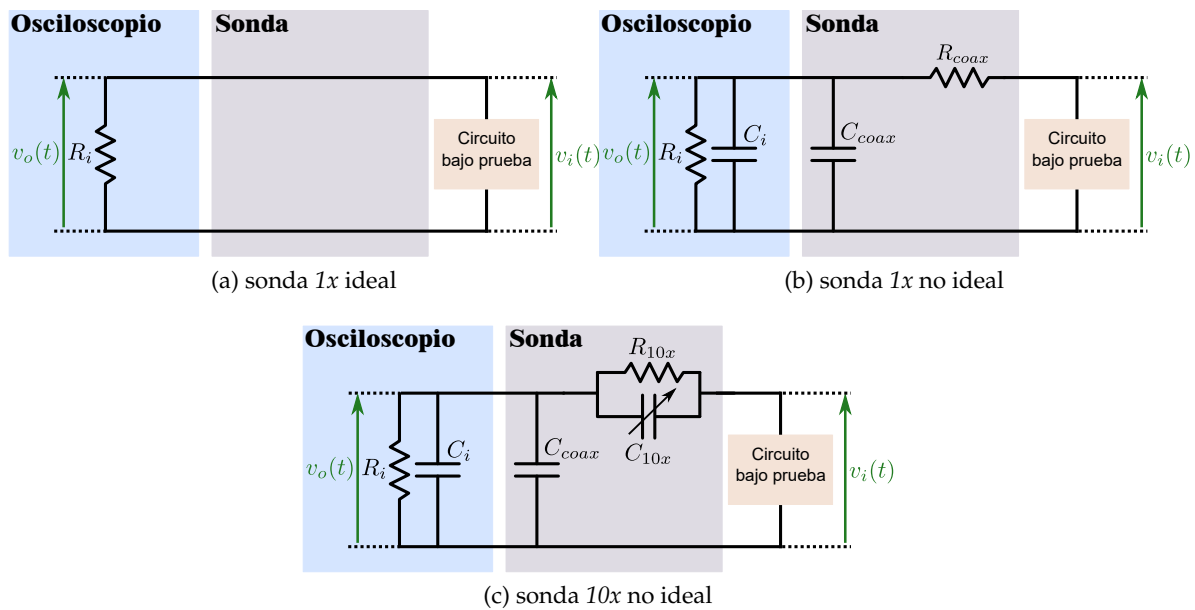
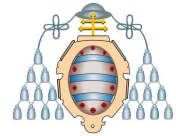


Figura 3: Sondas ideales y no ideales.

Teniendo en cuenta esto:

TAREA

1. ¿Qué condiciones se deben exigir a la función de transferencia (es decir, en el dominio frecuencia) para que un sistema no distorsione la señal?
2. Teniendo en cuenta la función de transferencia para el modo 10x calculada anteriormente, ¿Qué valor de c_{10x} garantiza que el sistema no tiene distorsión?
Consejo: observe que realmente el sistema no es más que un divisor de impedancias, donde cada impedancia está formada por una resistencia en paralelo con uno o dos condensadores.