

El Desarrollo en Serie de Fourier

1. Objetivos

En esta práctica de laboratorio nos centraremos en el desarrollo en serie de Fourier tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico. En primer lugar, realizaremos una implementación básica de las ecuaciones de síntesis y de análisis, y se analizarán de manera numérica algunos desarrollos representativos. En segundo lugar, estudiaremos el análisis (simplificado) del principio de funcionamiento de un multiplicador de frecuencia, el cual es un componente habitual en muchos sistemas de radiofrecuencia.

2. Implementación básica de un Desarrollo en Serie de Fourier

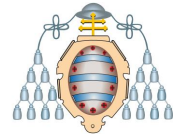
En primer lugar debemos recordar que el desarrollo en serie de Fourier viene definido por sus ecuaciones de análisis y síntesis como:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \quad f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}$$

La implementación para llevar a cabo estas ecuaciones está esbozada en los Algoritmos 1 y 2. Deben tenerse en cuenta varias observaciones a la hora de implementar y entender como funcionan estas implementaciones. En relación a la ecuación de análisis (Algoritmo 1), se debe considerar un vector de puntos de evaluación x que cubra un único periodo fundamental. Además, la señal de entrada $f(x)$ ya no está definida por una *anonymous function* como en prácticas anteriores sino por un vector con sus valores en los puntos descritos en x ¹. Finalmente, observe que esta rutina siempre proporciona los coeficientes para un rango simétrico desde un valor $-N$ a N , siendo N definida por el usuario.

En relación a la ecuación de síntesis (Algoritmo 2), el vector de coeficientes a debe estar definido en un intervalo simétrico desde $-N$ a N . Por tanto, numéricamente se trabajará con un desarrollo en serie de Fourier *truncado*. En este caso, no existen restricciones sobre los puntos de observación x .

¹Realmente se podría hacer también una rutina basada en *anonymous functions* pero se prefiere esta forma para facilitar la segunda parte de esta práctica.



En esta sesión, con el objetivo de evitar errores numéricos, se recomienda emplear 1001 puntos por periodo, los cuales permiten modelar de manera precisa las señales aquí consideradas. No obstante, tenga en cuenta que este valor no es óptimo y que no es válido para cualquier señal.

input : Vector x con los valores x en los cuales $f(x)$ ha sido evaluada. Su longitud debe ser un periodo fundamental.
input : Vector f_0 con los valores de la función evaluada en x .
input : Orden del máximo coeficiente de Fourier N .
output: Vector a con los coeficientes desde $-N$ a N . Por tanto, la longitud del vector será $2N + 1$.

```

1 X0 ← x(end) - x(1)           %Periodo fundamental;
2 xi0 ← 2π / X0                 %Pulsación angular;
3 Inicializa a con ceros        %a = zeros(1, 2*N+1);
4 for m desde -N a N do
    %Índice ind para acceder a a de modo que el coeficiente
    %para m = -N está en primera posición (1) y el coeficiente
    %correspondiente a m = N está en la última posición (2N + 1)
5   ind ← m + N + 1;
6   integrand ← 1/X0 * f0(x) * e-jmξ0x;
7   a(ind) ← Valor de la integral de trapz(x, integrand);
8 end

```

Algoritmo 1: Pseudocódigo para la ecuación de análisis.

input : Vector a con los coeficientes del DSF. Los coeficientes deben estar en un rango simétrico desde $-N$ a N
input : X_0 periodo fundamental de la señal.
input : Vector x con los valores x donde $f_0(x)$ será evaluada. La longitud será de un periodo fundamental.
output: Vector f con los valores de $f_0(x)$ evaluada en x

```

1 N ← (length(a) - 1) / 2       %Coeficiente máximo;
2 xi0 ← 2π / X0                 %Pulsación angular;
3 Inicializa f0 con ceros       %f0 = zeros(1, length(x));
4 for m desde -N a N do
5   f0 ← f0 + a(m) * ejmξ0x;
6 end

```

Algoritmo 2: Pseudocódigo para la ecuación de síntesis.

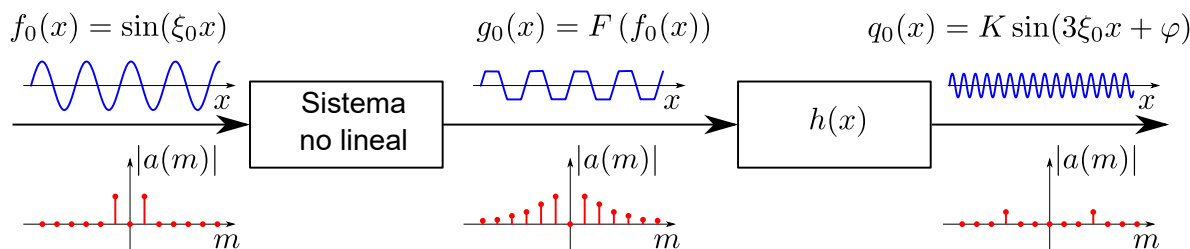
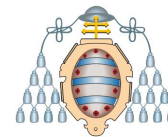


Figura 1: Principio de funcionamiento de un multiplicador.

TAREA

1. Implemente las ecuaciones de análisis y síntesis siguiendo el formato definido en los Algoritmos 1 y 2.
2. Calcule numéricamente el DSF de la señal $f_0(x) = \Pi_{0,1}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(x - 3n)$ y compare el resultado con el teórico.
3. A partir del DSF del apartado anterior, recupere (numéricamente) la señal $f_0(x)$. ¿Qué diferencias observa? ¿A qué son debidas estas diferencias? Experimente para $N = 5$ y $N = 25$.
4. Calcule el DSF de $f_0(x)$ definida en un periodo fundamental X_0 como $f_0(x) = e^{-x/X_0}$, $x \in [0, X_0)$ para $X_0 = 2$ y compare el resultado con el analítico.

3. Ejemplo de análisis de un sistema mediante el Desarrollo en Serie de Fourier

A menudo no es posible generar de manera directa señales sinusoidales a muy alta frecuencia. En este problema se presentan los rudimentos para generar una señal de cierta frecuencia usando como punto de partida una señal sinusoidal de más baja frecuencia.

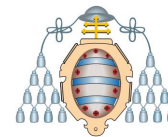
3.1. Principio de funcionamiento

Una estrategia para tal fin es utilizar dos sistemas concatenados como se muestra en la figura 1. El primero de ellos es un sistema no lineal sin memoria (p.ej., un diodo). De este modo, la señal seguirá siendo periódica pero ya no será un tono puro y, como cualquier señal periódica, se podrá descomponer como una suma infinita de senos y cosenos.

El segundo sistema sí es un sistema lineal e invariante, que actúa a modo de filtro cuyos coeficientes $H(n) = H(n\xi_0)$ son nulos excepto a la frecuencia de interés. De este modo, a la salida del sistema se tienen tan sólo componentes a la frecuencia deseada.

3.2. Análisis del sistema

A continuación se proponen una serie de tareas para analizar este tipo de dispositivos. Para ello, supondremos que la relación entre la entrada y la salida del sistema no lineal viene



dada por:

$$g(x) = \begin{cases} A & f(x) > A \\ -A & f(x) < -A \\ f(x) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases},$$

sistema que puede implementarse fácilmente con el siguiente código:

```
1 function g = non_linear_system(f, A)
2 g = f; %Valor por defecto salvo que se sobreescriba despues.
3
4 ind = f>A; %índices en los cuales f es mayor que A
5 g(ind)= A;
6
7 ind = f<-A; %índices en los cuales f es menor que -A
8 g(ind) = -A;
```

Observe que si el parámetro A del sistema es cero, la señal a la salida será nula. Si por el contrario, el parámetro A es muy grande (mayor que la amplitud de la senoide de entrada), la señal a la salida $g_0(x)$ seguirá siendo una senoide y, por tanto, la señal final $q_0(x)$ no tendrá términos a la frecuencia deseada y será, por tanto, nula. Es de esperar por tanto, que exista al menos un punto de trabajo óptimo (es decir, donde la potencia de la señal de salida sea máxima) en algún valor intermedio de A .

Suponiendo que $f_0(x) = C \sin(\xi_0 x)$ con $\xi_0 = 2\pi$ y $C = 1$, y utilizando un vector de puntos para $x \in [-\frac{X_0}{2}, \frac{X_0}{2}]$ con 1001 puntos, realice las siguientes tareas:

TAREA

1. Dibuje las señales $f_0(x)$ y $g_0(x)$ para diferentes valores de A (p. ej., $0, 0,25C, 0,75C, C$ y $1,25C$).
2. Calcule numéricamente la potencia media de las señales $f_0(x)$ y $g_0(x)$ para diferentes valores de A .
3. Calcule y compare los DSFs de la señal $f_0(x)$ y $g_0(x)$ para diferentes valores de A .
4. Calcule nuevamente las potencias medias a partir de los coeficientes del DSF (se recomienda usar $N \geq 15$).
5. Suponiendo que se desea que la señal final, tras el filtrado, sea a una frecuencia $3\xi_0$, dibuje la relación de potencias, habitualmente denominada *eficiencia de potencia*, entre las señales a la entrada, $f_0(x)$, y salida final, $q_0(x)$, en el rango $A \in [0, C]$. Para ello, calcule numéricamente la relación de potencias para varios puntos A . ¿Cuál es el punto óptimo de trabajo?
6. Para $A = 0,5$, dibuje las señales a la entrada, $f_0(x)$, y salida final, $q_0(x)$. Además de la diferente frecuencia, ¿qué otras diferencias observa?