

Tema 2: Hoja de ejercicios

Recuerde que si tiene dudas con la notación, puede consultar la hoja de conversión en el campus virtual.

Ejercicio 1

Demuestre que la norma inducida por el producto escalar, cumple con los requisitos para ser una norma.

Ejercicio 2

Demuestre que la distancia inducida por la norma, cumple con los requisitos para ser una distancia.

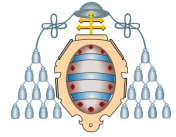
Ejercicio 3

Calcule la norma inducida por el producto escalar $\|f(x)\| = (\langle f(x), f(x) \rangle)^{\frac{1}{2}}$ para las siguientes funciones y ordene las funciones en base su “tamaño” (i.e., su norma):

- $f_1(x) = e^{-x^2}$, observe que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
- $f_2(x) = e^{-|x|}$
- $f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$, nota se puede demostrar integrando por partes ($x = \tan u$ y $dx = \sec^2 u du$) que $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$
- $f_4(x) = \frac{x}{x^2+1}$, nota operando de manera similar $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$
- $f_5(x) = e^{-|x|} \cos(\xi_0 x)$, puede ayudarse de la siguiente expresión $\int e^{ax} \cos^n(bx) dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1}(bx)}{a^2+n^2b^2} [a \cos(bx) + nb \sin(bx)] + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2}(bx) dx$
- $f_6(x) = e^{-|x|} \sin(\xi_0 x)$, puede ayudarse de la siguiente expresión $\int e^{ax} \sin^n(bx) dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1}(bx)}{a^2+n^2b^2} [a \sin(bx) - nb \cos(bx)] + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2}(bx) dx$

Ejercicio 4

Calcule la distancia inducida por la norma anterior entre $f_1(x) = e^{-x^2}$ y $f_2(x) = e^{-|x|}$. Recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Además, a partir de la expresión anterior, se puede demostrar completando cuadrados que $\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2-4ac)/4a} \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)$ siendo erfc la función de error complementaria, la cual puede asumir que se encuentra tabulada.



Ejercicio 5

Calcule la norma inducida por el producto escalar $\|x(n)\| = (\langle x(n), x(n) \rangle)^{\frac{1}{2}}$ para las siguientes funciones y ordene las funciones en base su "tamaño" (i.e., su norma):

- $x_1(n) = e^{-n^2}$
- $x_2(n) = e^{-|n|}$

Para resolver este ejercicio, puede resultarle útil la fórmula de la suma de la serie geométrica (disponible en las tablas de la asignatura).

Ejercicio 6

Ejercicios 4.1, 4.2 4.3 y 4.4 del libro de Emilio (los primeros ya han sido parcialmente cubiertos en la práctica de aula).

Ejercicio 7

Determina la potencia y energía de cada una de las siguientes señales::

- $f_1(x) = e^{7t}u(t)$
- $f_3(x) = \cos(x)$
- $x_2(n) = e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8})}$
- $f_2(x) = e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}$
- $x_1(n) = \frac{1}{2^n}u(n)$
- $x_3(n) = \cos(\frac{\pi}{4}n)$

Nota: las funciones escalón unitario $u(x)$ y $u(n)$ se definen como $u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ y $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Ejercicio 8

Determine si las siguientes señales son o no periódicas:

- $f_1(x) = 2e^{j(x + \frac{\pi}{4})}u(x)$
- $x_2(n) = u(n) + u(-n)$
- $x_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(n - 4k) - \delta(n - 1 - 4k)\}$

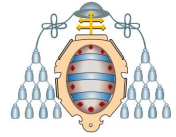
Nota: la función impulso discreta se define como $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$.

Ejercicio 9

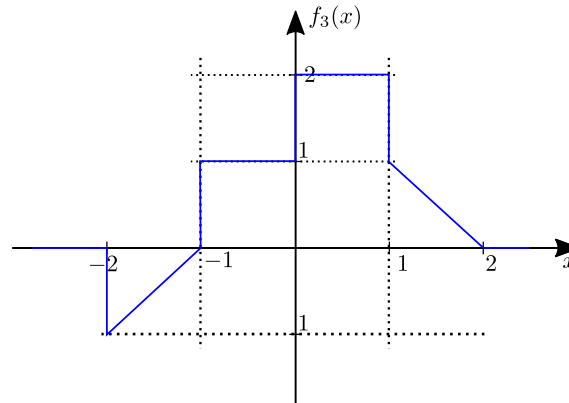
Determine el periodo fundamental de la señal $f(x) = 2\cos(10x + 1) - \sin(4x - 1)$

Ejercicio 10

A partir de la figura dibujada abajo, represente las siguientes funciones:

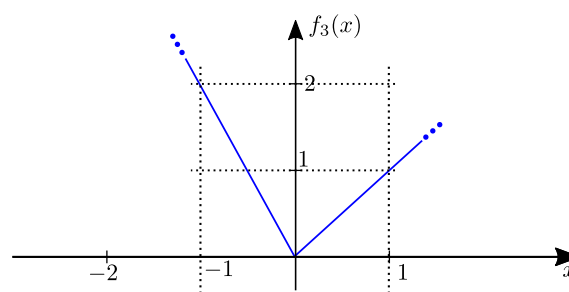
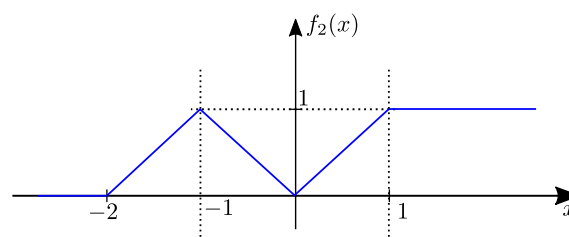
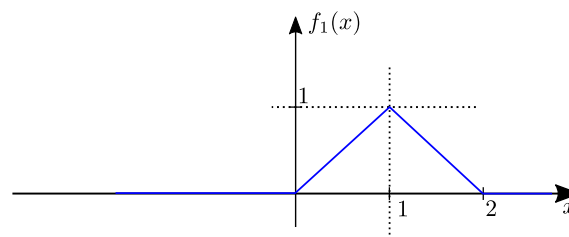


1. $f(x-1)$
2. $f(2-x)$
3. $f(2x+1)$
4. $f(4-\frac{x}{2})$
5. $[f(x) + f(-x)]u(x)$



Ejercicio 11

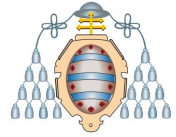
Determine y bosqueje la parte par e impar de las siguientes señales



Ejercicio 12

Determine si las siguientes señales son o no periódicas y, en caso afirmativo, calcule su periodo fundamental:

1. $f(x) = 3 \cos(4x + \frac{\pi}{3})$



2. $f(x) = e^{j(\pi x - 1)}$
3. $f(x) = \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
4. $f(x) = \mathcal{E}v\{\cos(4\pi x u(t))\}$, donde el operador $\mathcal{E}v\{\cdot\}$ denota parte par de la señal.
5. $f(x) = \mathcal{E}v\{\sin(4\pi x u(t))\}$, donde el operador $\mathcal{E}v\{\cdot\}$ denota parte par de la señal.
6. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2x-n}$.

Ejercicio 13

Sea $f(x)$ una señal de variable continua y sean

$$g_1(x) = x(2t) \text{ y } g_2(x) = f(x/2)$$

La señal $g_1(x)$ representa una versión acelerada de la señal de $f(x)$, en el sentido de que su duración es la mitad. De manera similar, la señal $g_2(x)$ representa una señal ralentizada de $f(x)$.

Considere las siguientes afirmaciones

- Si $f(x)$ es periódica, entonces $g_1(x)$ es periódica.
- Si $g_1(x)$ es periódica, entonces $f(x)$ es periódica.
- Si $f(x)$ es periódica, entonces $g_2(x)$ es periódica.
- Si $g_2(x)$ es periódica, entonces $f(x)$ es periódica.

¿Cuáles son verdaderas y cuales son falsas? En caso de que sean verdaderas, encuentre la relación entre los periodos. Si son falsas, busque un contraejemplo.

Ejercicio 14

En este problema se exploran diversas propiedades de las señales pares e impares:

- Muestre que si $x(n)$ es una señal impar, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$$

- Muestre que si $x_1(n)$ es una señal impar y $x_2(n)$ es una señal par, entonces $x_1(n)x_2(n)$ es una señal impar.
- Sea $x(n)$ una señal arbitraria, cuyas partes par e impar se denotan por $x_e(n)$ y $x_o(n)$. Demuestre que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n)$$

- Al igual que se ha hecho para variable discreta en los apartados previos, demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_e^2(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_o^2(x) dx$$

siendo $f_e(x)$ y $f_o(x)$ las partes par e impar de $f(x)$, respectivamente.