

Tema 8: Administración de Proyectos

Modelización Matemática
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Ignacio Montes
Departamento de Estadística e I.O. y D.M.

- 1 Descripción del problema
 - Definiciones básicas
 - Representaciones gráficas

- 2 Algoritmos
 - CPM
 - PERT

- Un proyecto puede estar formado de muchas actividades.
- Cada actividad tiene una duración estimada.
- Algunas actividades no pueden comenzarse hasta que se hayan finalizado otras previas.

Objetivos:

- Buscar representaciones de las redes de actividad.
- Estudiar la duración del proyecto.
- Calcular la holgura de cada actividad.

Ejemplo

Objetivo: montar una línea de tren que atravesase una montaña mediante un túnel. Los pasos a seguir vienen descritos a continuación:

Actividades

- A: contratar personal
- B: formar personal
- C: estudios previos y planificación
- D: tunelar
- E: comprar el material para las vías
- F: comparar el material electrónico
- G: montar las vías
- H: montar los sistemas electrónicos
- I: comprobar el funcionamiento

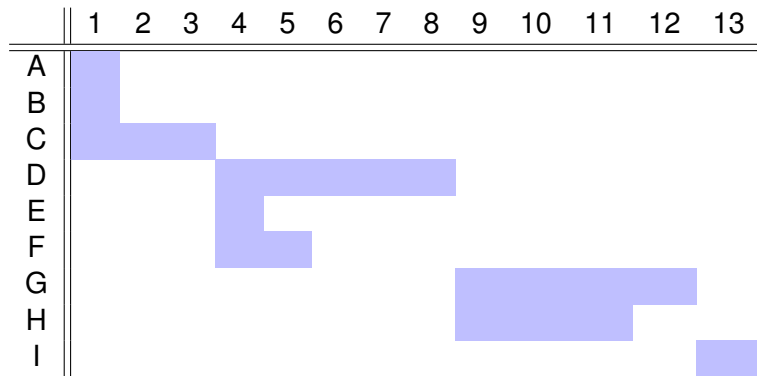
Ejemplo

Objetivo: montar una línea de tren que atravesase una montaña mediante un túnel. Los pasos a seguir vienen descritos a continuación:

Actividades	Predecesores	Duración
A: contratar personal	-	1 mes
B: formar personal	-	1 mes
C: estudios previos y planificación	-	3 meses
D: tunelar	A,B,C	5 meses
E: comprar el material para las vías	C	1 mes
F: comprar el material electrónico	C	2 meses
G: montar las vías	D,E	4 meses
H: montar los sistemas electrónicos	D,F	3 meses
I: comprobar el funcionamiento	G,H	1 mes

- 1 Gráfico de Gantt.
- 2 Grafos orientados.

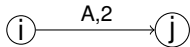
Gráfico de Gantt



Grafos orientados

Reglas para representar redes de actividad mediante grafos orientados:

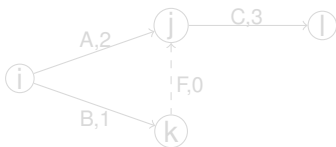
- 1 Cada arco (i, j) representa una actividad, los vértices inicial i y final j representan el inicio y final de la actividad ($i < j$). Al arco se le añade un peso que es la duración de esa actividad.



- 2 Si A precede a B , $A = (i, j)$ y $B = (j, k)$, donde $i < j < k$.



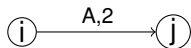
- 3 Dos actividades distintas no pueden tener los mismos vértices inicial y final. En tal caso hay que crear arcos ficticios con duración nula. Si A y B preceden a C :



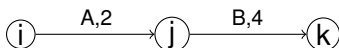
Grafos orientados

Reglas para representar redes de actividad mediante grafos orientados:

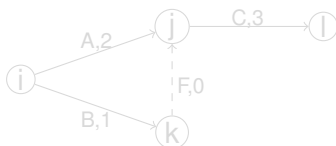
- 1 Cada arco (i, j) representa una actividad, los vértices inicial i y final j representan el inicio y final de la actividad ($i < j$). Al arco se le añade un peso que es la duración de esa actividad.



- 2 Si A precede a B , $A = (i, j)$ y $B = (j, k)$, donde $i < j < k$.



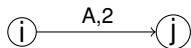
- 3 Dos actividades distintas no pueden tener los mismos vértices inicial y final. En tal caso hay que crear arcos ficticios con duración nula. Si A y B preceden a C :



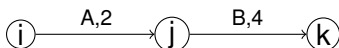
Grafos orientados

Reglas para representar redes de actividad mediante grafos orientados:

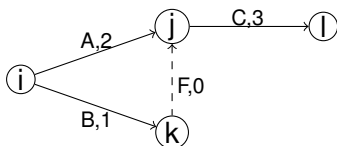
- 1 Cada arco (i, j) representa una actividad, los vértices inicial i y final j representan el inicio y final de la actividad ($i < j$). Al arco se le añade un peso que es la duración de esa actividad.



- 2 Si A precede a B , $A = (i, j)$ y $B = (j, k)$, donde $i < j < k$.

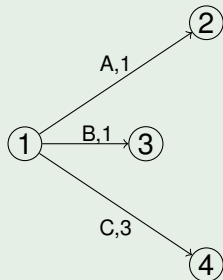


- 3 Dos actividades distintas no pueden tener los mismos vértices inicial y final. En tal caso hay que crear arcos ficticios con duración nula. Si A y B preceden a C :



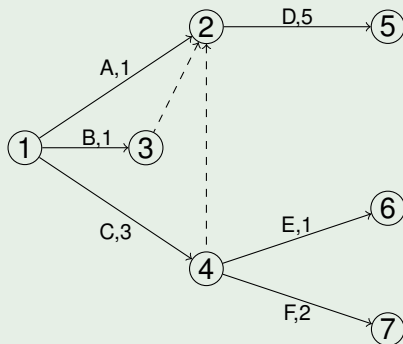
Ejemplo: representación mediante grafos

Ejemplo



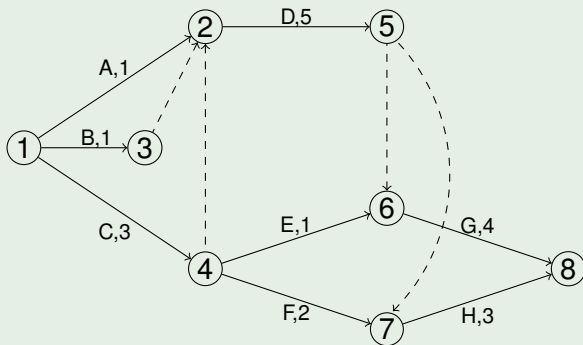
Ejemplo: representación mediante grafos

Ejemplo



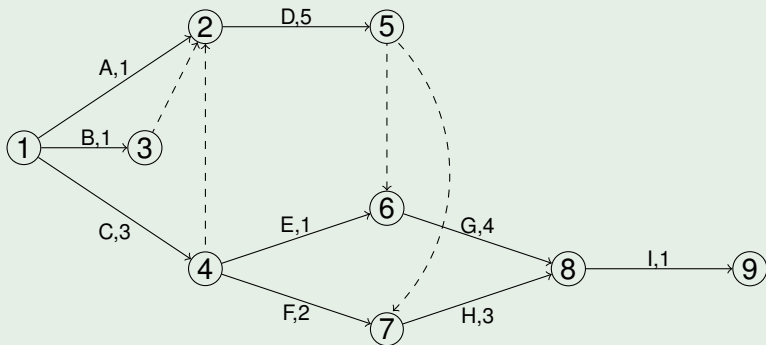
Ejemplo: representación mediante grafos

Ejemplo



Ejemplo: representación mediante grafos

Ejemplo



Ejercicio

Objetivo: Cocinar una lasaña. Los pasos a seguir son los siguientes:

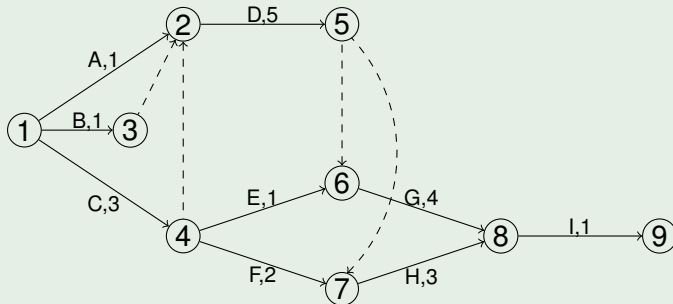
	Actividades	Predecesores	Duración
1	Comprar mozzarella	-	30 minutos
2	Cortar la mozzarella	1	5 minutos
3	Batir 2 huevos	-	2 minutos
4	Mezclar los huevos y el queso ricotta	3	3 minutos
5	Pelar cebollas y champiñones	-	7 minutos
6	Cocinar la salsa de tomate	5	25 minutos
7	Cocer agua	-	15 minutos
8	Cocer las láminas de lasaña	7	10 minutos
9	Secar las láminas de lasaña	8	2 minutos
10	Unir los ingredientes	2,4,6,9	10 minutos
11	Precalentar el horno	-	15 minutos
12	Hornear la lasaña	10,11	30 minutos

Modelar el problema mediante una red de actividades.

Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.

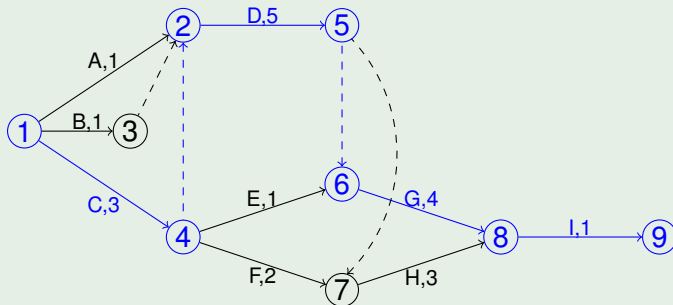
Ejemplo (Duración del proyecto)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.

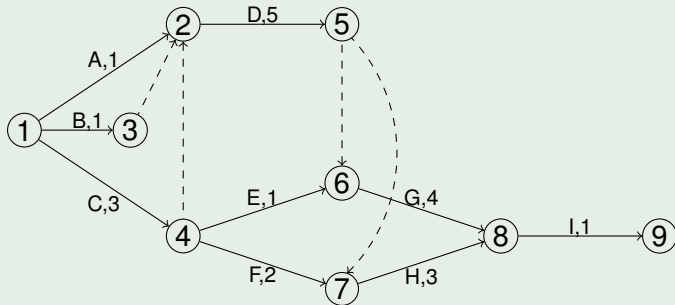
Ejemplo (Duración del proyecto: 13 meses)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.

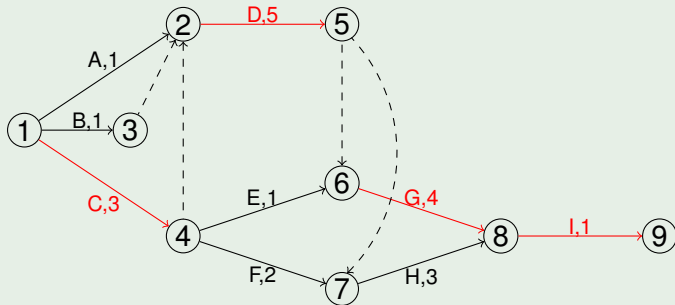
Ejemplo (Actividades críticas)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.

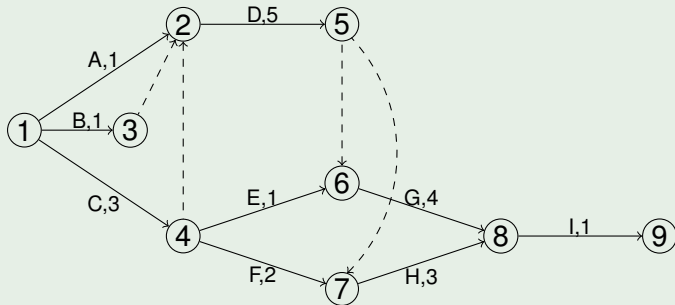
Ejemplo (Actividades críticas: C, D, I)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.
- 3 **Holgura de cada actividad:** cuánto puedo retrasar cada actividad para que el proyecto no se retrase.

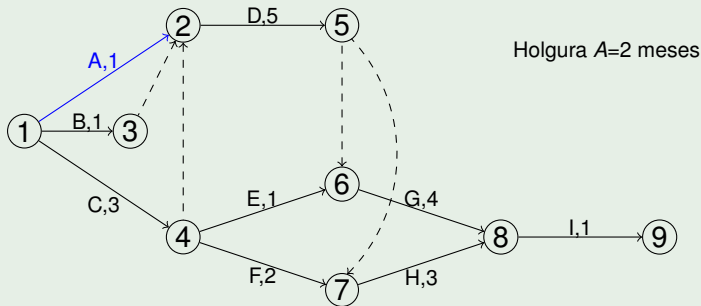
Ejemplo (Holguras)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.
- 3 **Holgura de cada actividad:** cuánto puedo retrasar cada actividad para que el proyecto no se retrase.

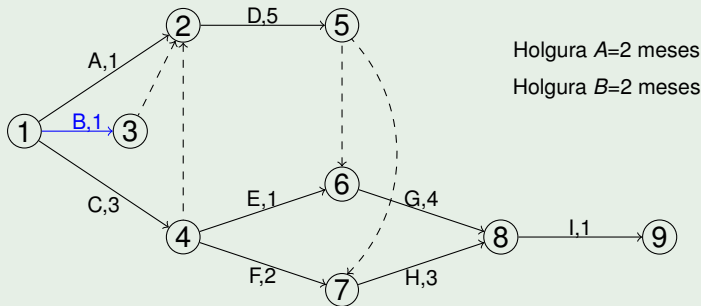
Ejemplo (Holguras)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.
- 3 **Holgura de cada actividad:** cuánto puedo retrasar cada actividad para que el proyecto no se retrase.

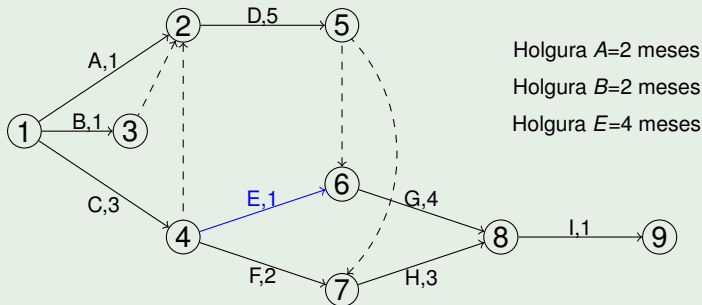
Ejemplo (Holguras)



Objetivo

- 1 **Duración del proyecto:** camino de mayor valor.
- 2 **Actividades críticas:** actividades que no se pueden retrasar; su retraso conllevaría el retraso en el proyecto.
- 3 **Holgura de cada actividad:** cuánto puedo retrasar cada actividad para que el proyecto no se retrase.

Ejemplo (Holguras)



Camino de mayor valor Solamente da la duración del proyecto, no las actividades críticas ni las holguras.

Critical path method (CPM) Se utiliza la duración del proyecto así como las holguras y las actividades críticas.

Problema: puede no tener sentido fijar la duración exacta de cada actividad.

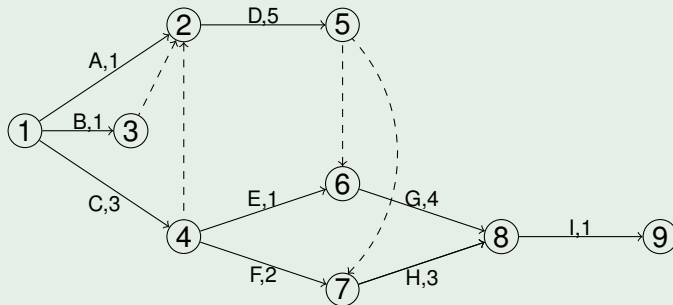
Program Evaluation and Review Technique (PERT) Se utiliza la duración del proyecto así como las holguras y las actividades críticas. Para cada actividad le asigna una distribución normal modelando la duración de la actividad.

Problema: se supone que los tiempos de duración de cada actividad son independientes, y puede no ser realista.

Definiciones básicas

- **Early event time (ET):** del vértice i es el instante más temprano en el que el vértice i puede ocurrir.

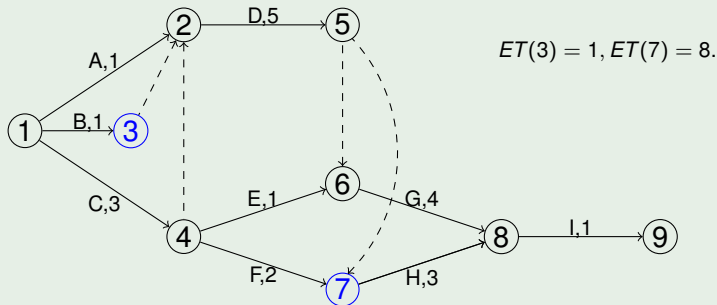
Ejemplo



Definiciones básicas

- **Early event time (ET):** del vértice i es el instante más temprano en el que el vértice i puede ocurrir.

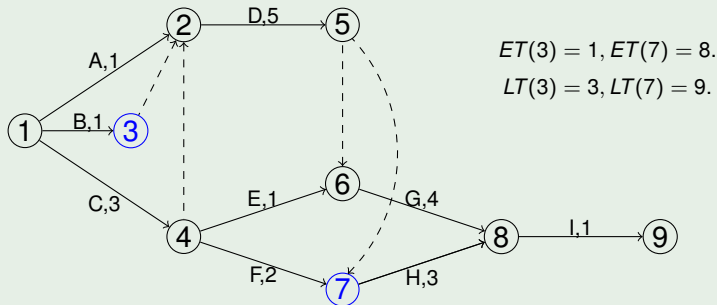
Ejemplo



Definiciones básicas

- **Early event time (ET):** del vértice i es el instante más temprano en el que el vértice i puede ocurrir.
- **Late event time (LT):** del vértice i es el instante más tardío en el que el vértice i puede ocurrir sin retrasar la duración del proyecto.

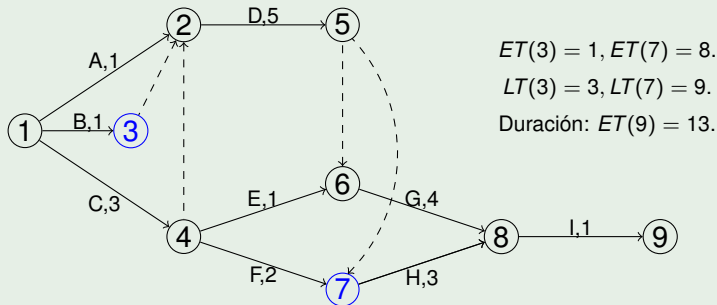
Ejemplo



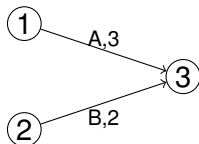
Definiciones básicas

- **Early event time (ET):** del vértice i es el instante más temprano en el que el vértice i puede ocurrir.
- **Late event time (LT):** del vértice i es el instante más tardío en el que el vértice i puede ocurrir sin retrasar la duración del proyecto.
- **Duración:** es el ET/LT del último vértice.

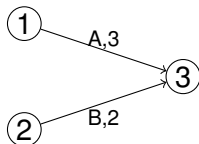
Ejemplo



Cálculo de ET:



Cálculo de ET:

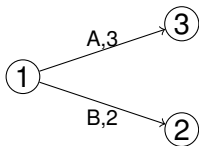


$$ET(3) = \max\{ET(1) + 3, ET(2) + 2\}.$$

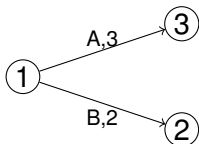
Algoritmo:

- 1 Para cada vértice i , calcular sus predecesores.
- 2 Para cada predecesor j de i , sumar a su $ET(j)$ la duración de la actividad (j, i) .
- 3 $ET(i)$ será el máximo de los valores calculados en el paso 2.

Cálculo de LT:



Cálculo de LT:

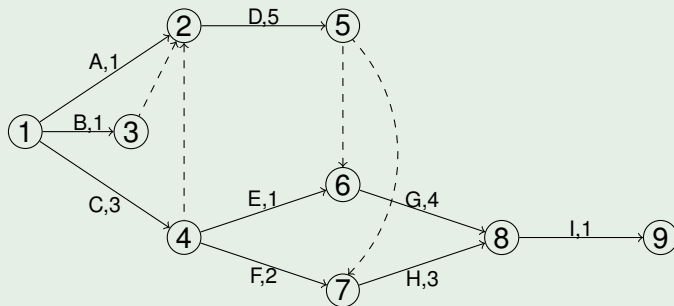


$$LT(1) = \min\{LT(2) - 3, LT(2) - 2\}.$$

Algoritmo:

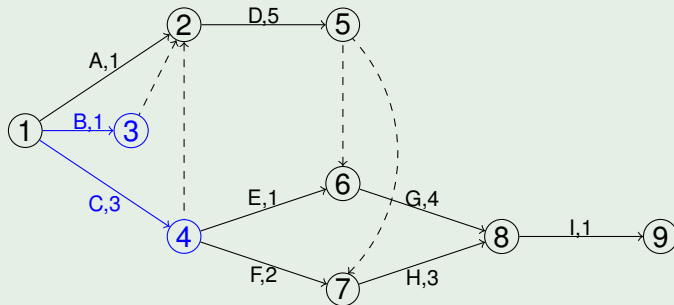
- 1 Para cada vértice i , calcular sus sucesores.
- 2 Para cada sucesor j de i , restar a su $LT(j)$ la duración de la actividad (i, j) .
- 3 $LT(i)$ será el mínimo de los valores calculados en el paso 2.

Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0								
LT									

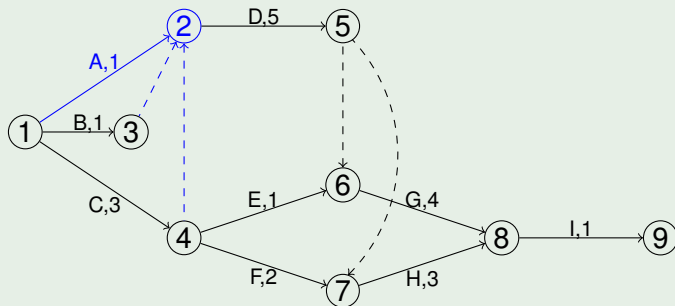
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0		1	3					
LT									

$$ET(3)=1, ET(4)=3.$$

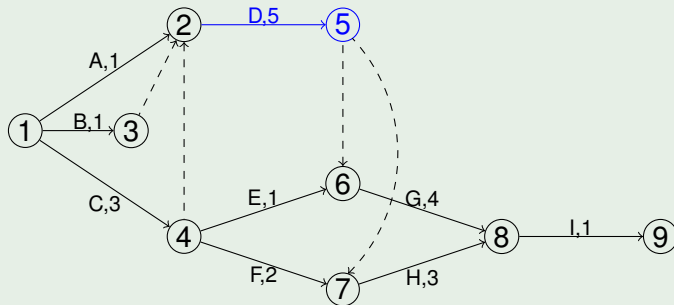
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3					
LT									

$$ET(2) = \max\{1, 1, ET(4) + 0\}.$$

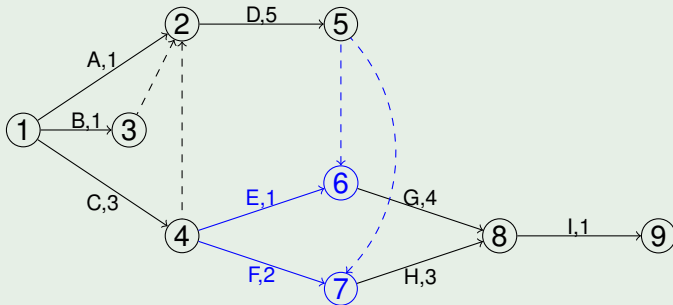
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8				
LT									

$$ET(5) = ET(2) + 5.$$

Ejemplo

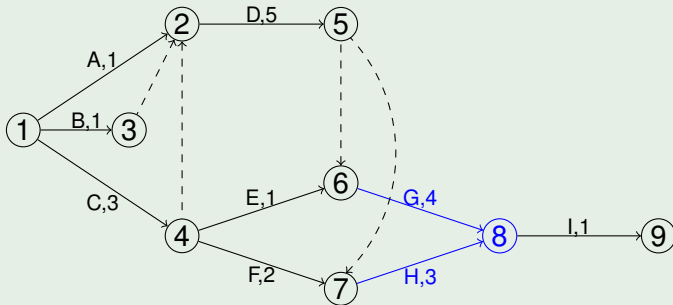


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8		
LT									

$$ET(6)=\max\{ET(5)+0, ET(4)+1\}, ET(7)=\max\{ET(5)+0, ET(4)+2\}.$$

Cálculo de ET y LT

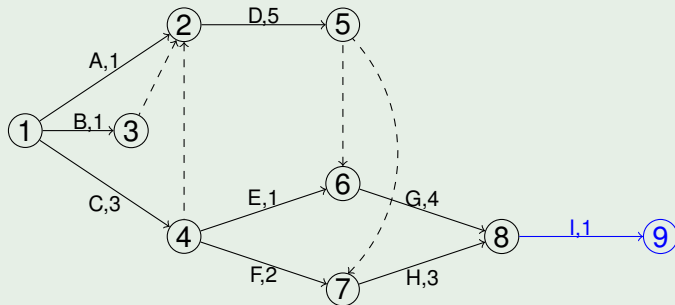
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	
LT									

$$ET(8) = \max\{ET(6) + 4, ET(7) + 3\}.$$

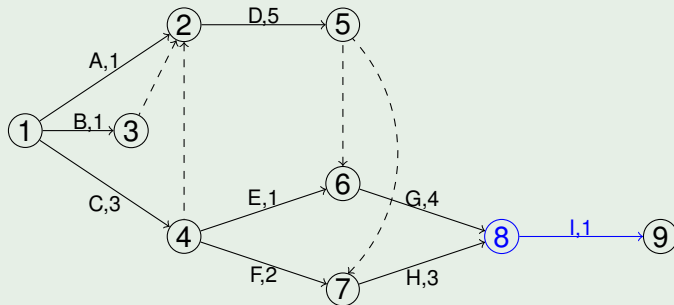
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT									13

$$ET(9) = ET(8) + 1.$$

Ejemplo

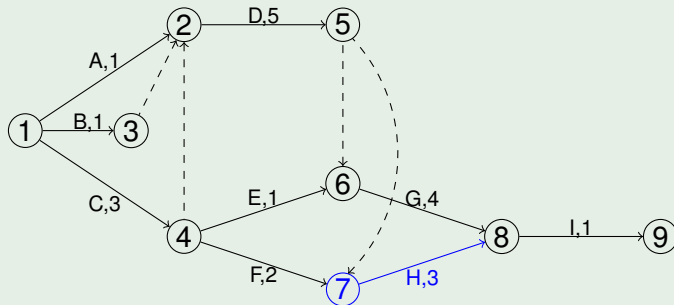


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT								12	13

$$LT(8) = LT(9) - 1.$$

Cálculo de ET y LT

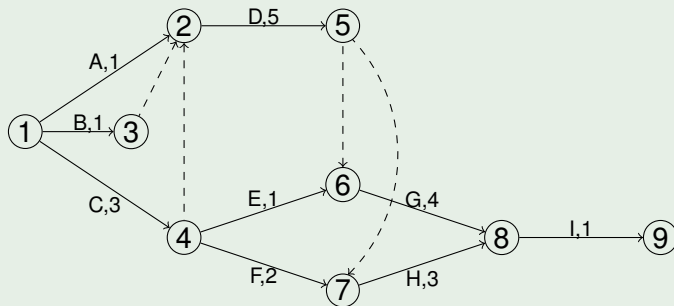
Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT							9	12	13

$$LT(7) = LT(8) - 3.$$

Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT	0	3	3	3	8	8	9	12	13

- **Holgura total (HT):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar la duración del proyecto:

$$HT(i,j)=LT(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

- **Holgura libre (HL):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar el inicio de las actividades posteriores:

$$HL(i,j)=ET(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

- **Actividades críticas:** son aquellas actividades con holgura total nula.

- **Holgura total (HT):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar la duración del proyecto:

$$HT(i,j)=LT(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

- **Holgura libre (HL):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar el inicio de las actividades posteriores:

$$HL(i,j)=ET(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

- **Actividades críticas:** son aquellas actividades con holgura total nula.

- **Holgura total (HT):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar la duración del proyecto:

$$HT(i,j)=LT(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

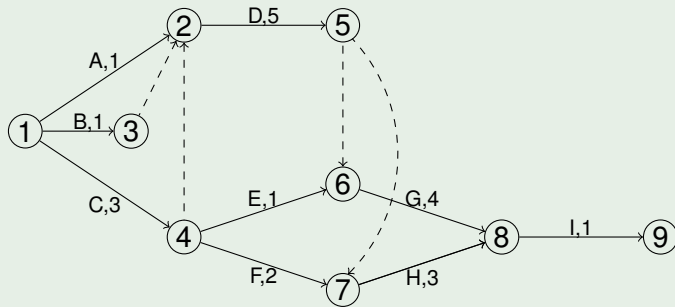
- **Holgura libre (HL):** de la actividad (i, j) es el tiempo que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) con respecto a $ET(i)$ sin retrasar el inicio de las actividades posteriores:

$$HL(i,j)=ET(j)-ET(i)-p_{ij}.$$

- **Actividades críticas:** son aquellas actividades con holgura total nula.

Cálculo de HT y HL

Ejemplo

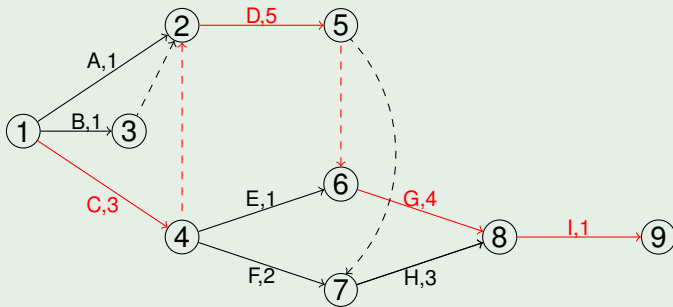


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT	0	3	3	3	8	8	9	12	13

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
HT	2	2	0	0	4	4	0	1	0
HL	2	2	0	0	4	3	0	1	0

Cálculo de HT y HL

Ejemplo



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ET	0	3	1	3	8	8	8	12	13
LT	0	3	3	3	8	8	9	12	13

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
HT	2	2	0	0	4	4	0	1	0
HL	2	2	0	0	4	3	0	1	0

Ejercicio

Objetivo: Cocinar una lasaña. Los pasos a seguir son los siguientes:

	Actividades	Predecesores	Duración
1	Comprar mozzarella	-	30 minutos
2	Cortar la mozzarella	1	5 minutos
3	Batir 2 huevos	-	2 minutos
4	Mezclar los huevos y el queso ricotta	3	3 minutos
5	Pelar cebollas y champiñones	-	7 minutos
6	Cocinar la salsa de tomate	5	25 minutos
7	Cocer agua	-	15 minutos
8	Cocer las láminas de lasaña	7	10 minutos
9	Secar las láminas de lasaña	8	2 minutos
10	Unir los ingredientes	2,4,6,9	10 minutos
11	Precalentar el horno	-	15 minutos
12	Hornear la lasaña	10,11	30 minutos

- 1 ¿Cuál será el tiempo de preparación de la lasaña?
- 2 ¿Qué actividades hay que hacer en tiempo para no retrasar la preparación de la lasaña?
- 3 Por culpa de una llamada telefónica, hemos tardado 6 minutos más de lo esperado en pelar las cebollas y los champiñones. ¿Se retrasará el tiempo de preparación de la lasaña?
- 4 Utilizando un robot de cocina, se puede pelar la cebolla y los champiñones en solamente 2 minutos. ¿Se reducirá el tiempo de preparación?

- **Problema del CPM:** parte de la hipótesis de que la duración de cada actividad es conocida y determinista.
- **PERT:** asume que la duración de cada actividad es aleatoria y que los tiempos de las actividades son independientes.

a: duración mínima estimada.

m: duración más probable.

b: duración máxima estimada.

Se define la *variable aleatoria* T_A que indica la duración de la actividad A de manera que:

$$E(T_A) = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad \text{Var}(T_A) = \frac{(b - a)^2}{36}.$$

Para un camino crítico, se define la duración total (que también es una variable aleatoria) como:

$$CP = \sum_{(i,j) \in CP} T_{ij} \longrightarrow \mathcal{N}$$

Suponiendo que las duraciones de las actividades son independientes:

$$CP = \sum_{(i,j) \in CP} T_{ij} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma),$$

donde:

- $\mu = \sum_{(i,j) \in CP} E(T_A).$
- $\sigma^2 = \sum_{(i,j) \in CP} Var(T_A).$