

Tema 7: Redes de Flujo

Modelización Matemática
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Ignacio Montes
Departamento de Estadística e I.O. y D.M.

Descripción del problema

Algoritmos

Red de flujo

Consideraremos una red orientada $R = (V, A, p)$ cumpliendo las siguientes propiedades:

- ▶ $G = (V, A)$ es un grafo conexo.
- ▶ Los pesos son no-negativos y reciben el nombre de **capacidad** del arco.
- ▶ Hay dos vértices llamados **fuelle** (F) y **salida** (S) de manera que F no tiene antecesores y S no tiene sucesores.

Flujo

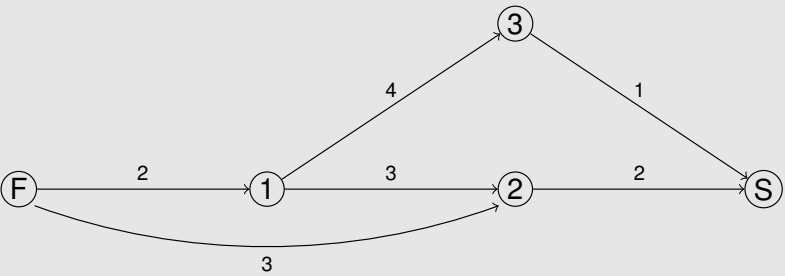
Partimos de una red de flujo $R = (V, A, p)$. El flujo de valor v es una colección de números que a cada arco (i, j) le asigna un valor f_{ij} , cumpliendo:

- ▶ **Acotación del flujo:** $0 \leq f_{ij} \leq p_{ij}$.
- ▶ **Conservación del flujo:** para todo $i \in V$,

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} f_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^{-}(i)} f_{ki} = \begin{cases} v, & \text{si } i = F. \\ -v, & \text{si } i = S. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

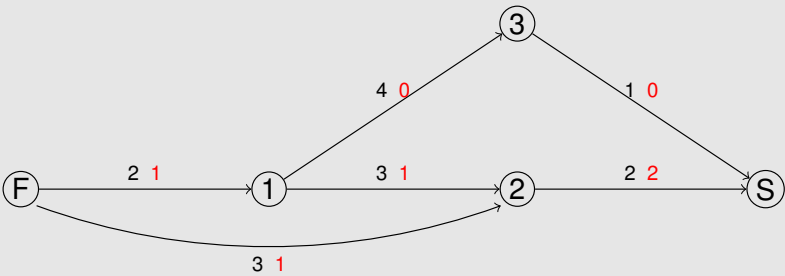
Ejemplo de flujo

Ejemplo (Red de flujo)



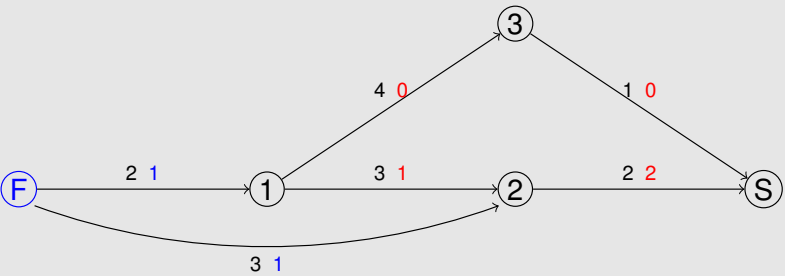
Ejemplo de flujo

Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



Ejemplo de flujo

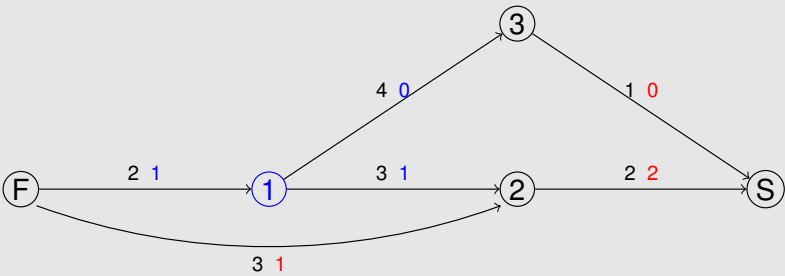
Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



$$\sum_{j \in \Gamma(F)} f_{Fj} - \sum_{k \in \Gamma^-(F)} f_{kF} = 1 + 1 = 2$$

Ejemplo de flujo

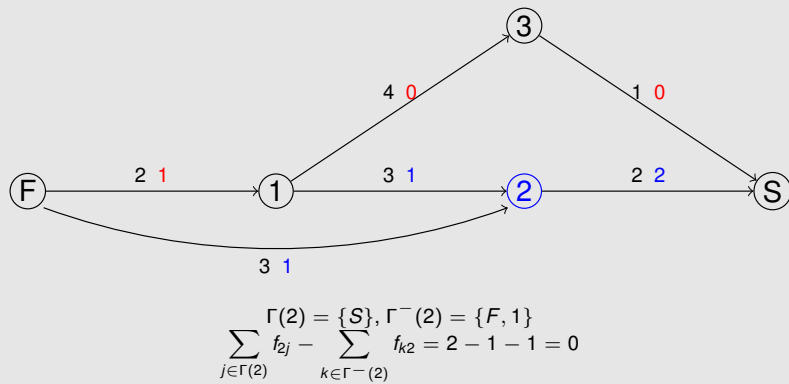
Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



$$\sum_{j \in \Gamma(1)} f_{1j} - \sum_{k \in \Gamma^-(1)} f_{k1} = 1 + 0 - 1 = 0$$

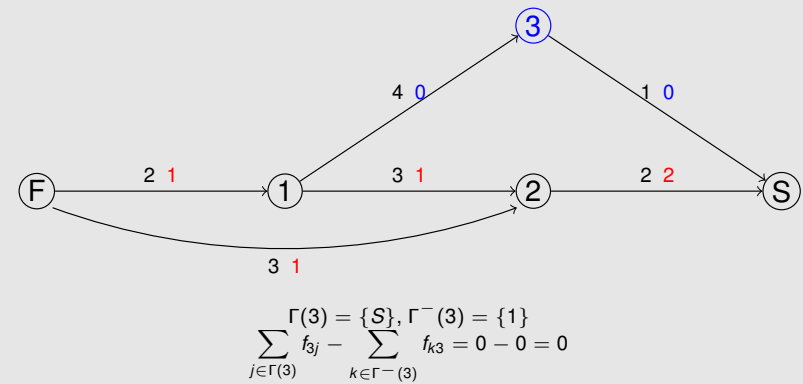
Ejemplo de flujo

Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



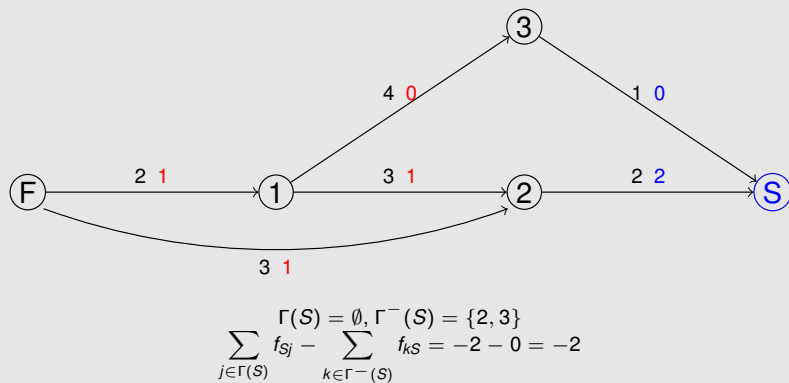
Ejemplo de flujo

Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



Ejemplo de flujo

Ejemplo (Red de flujo de valor $v = 2$)



Corte

Dada una red de flujo $R = (V, A, p)$ y una partición B, B^c de V , el **corte** de la red de flujo se denota por (B, B^c) y es el conjunto de arcos de A con origen en B y final B^c .

- La **capacidad** de corte (B, B^c) es el valor:

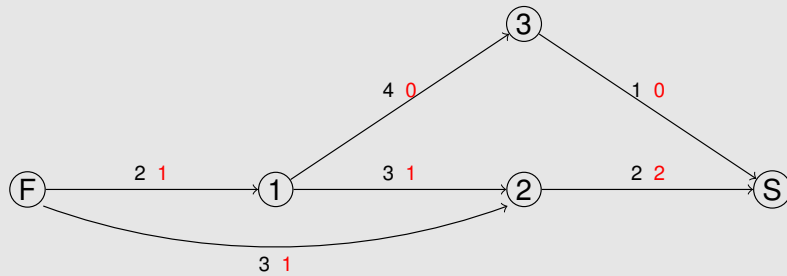
$$c(B, B^c) = \sum_{ij \in (B, B^c)} p_{ij}.$$

- El **flujo neto** del corte (B, B^c) es el valor:

$$f(B, B^c) = \sum_{i \in B, j \in B^c \cap \Gamma_i^+} f_{ij} - \sum_{i \in B, k \in B^c \cap \Gamma_i^-} f_{ki}.$$

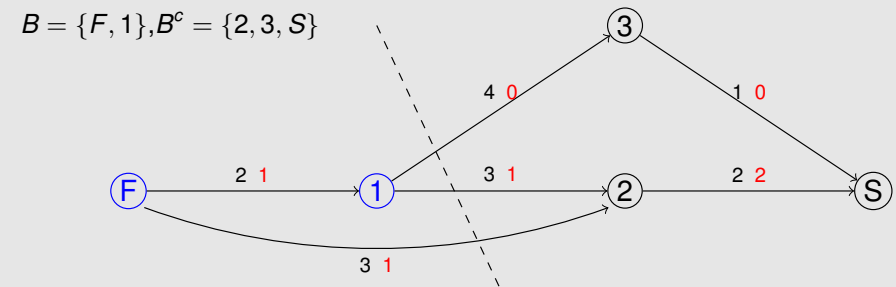
Ejemplo de corte de un flujo

Ejemplo (Corte)



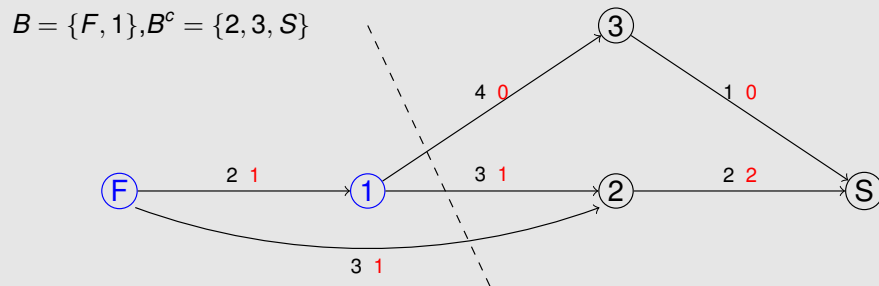
Ejemplo de corte de un flujo

Ejemplo (Corte $B = \{F, 1\}, B^c = \{2, 3, S\}$)



Ejemplo de corte de un flujo

Ejemplo (Corte $B = \{F, 1\}, B^c = \{2, 3, S\}$)



Capacidad: $c(B, B^c) = 4 + 3 + 3 = 10$.

Flujo neto: $f(B, B^c) = 0 + 1 + 1 = 2$.

Relación flujo-corte

Teorema

Sea $R = (V, A, p)$ una red de flujo, f un flujo y (B, B^c) un corte. Entonces:

- El valor del flujo está acotado por la capacidad del corte.
- El valor del flujo coincide con el flujo neto.

Objetivo: maximizar el flujo

Sea $R = (V, A, p)$ una red de flujo.

- **Flujo máximo:** es un flujo f^* de manera que cualquier otro flujo f satisfice $v_f \leq v_{f^*}$.
- **Objetivo:** encontrar el flujo máximo en $R = (V, A, p)$.

Algoritmos

Ford-Fulkerson Algoritmo clásico de etiquetado. Se trata de buscar caminos de flujo aumentable.

Boykov-Kolmogorov Algoritmo novedoso (2004) que mejora algoritmos previos tanto para el problema del flujo máximo como para el flujo a coste mínimo. Es el algoritmo utilizado por MatLab.

Objetivo: maximizar el flujo

Sea $R = (V, A, p)$ una red de flujo.

- **Flujo máximo:** es un flujo f^* de manera que cualquier otro flujo f satisfice $v_f \leq v_{f^*}$.
- **Objetivo:** encontrar el flujo máximo en $R = (V, A, p)$.
- **Corte mínimo:** es un corte (B, B^c) que para otro corte (C, C^c) cumple $c(B, B^c) \leq c(C, C^c)$.
- Se cumple que el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Ford-Fulkerson (I)

1. Considera un flujo f en la red $R = (V, A, p)$ (por ejemplo, $f=0$).
2. Denotar por A_1 el conjunto de arcos no saturados ($p_{ij} > f_{ij}$) y por A_2 el conjunto de arcos con flujo positivo ($f_{ij} > 0$). Etiquetado:
 - 2.1 Se le asigna la etiqueta + al vértice F .
 - 2.2 Si i está etiquetado, j no está etiquetado y $(i, j) \in A_1$, entonces etiqueto i y (i, j) . (i, j) es un *arco de salida*.
 - 2.3 Si j no está etiquetado, i está etiquetado y $(j, i) \in A_2$, entonces etiquetar j y (j, i) . (j, i) es un *arco de entrada*.
 - 2.4 Continuar el etiquetado hasta llegar a S o hasta que no sea posible etiquetar más arcos/vértices.

Ford-Fulkerson (II)

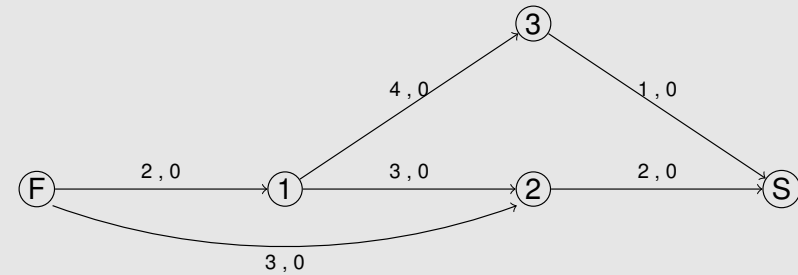
3. Si S no se ha etiquetado, el flujo es máximo. Si S se ha etiquetado, buscar una **cadena** formada por arcos etiquetados desde F hasta S . Definir:

$$k_1 = \min\{f_{ij} \mid (i, j) \in C \cap A_2\},$$
$$k_2 = \min\{p_{ij} - f_{ij} \mid (i, j) \in A_1 \cap C\},$$
$$k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Aumentar en k unidades el flujo de los arcos de $C \cap A_1$ y disminuir en k unidades el flujo de los arcos de $C \cap A_2$. Volver al paso 2.

Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 1: consideramos el flujo nulo)

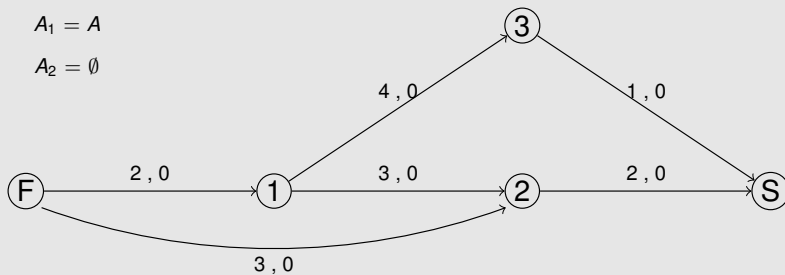


Valor del flujo: $v = 0$

Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 2: definir A_1, A_2)

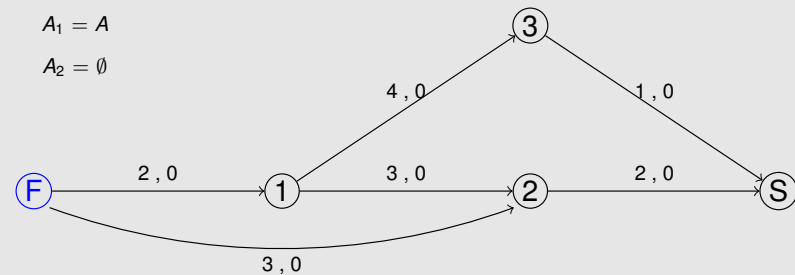
$$A_1 = A$$
$$A_2 = \emptyset$$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

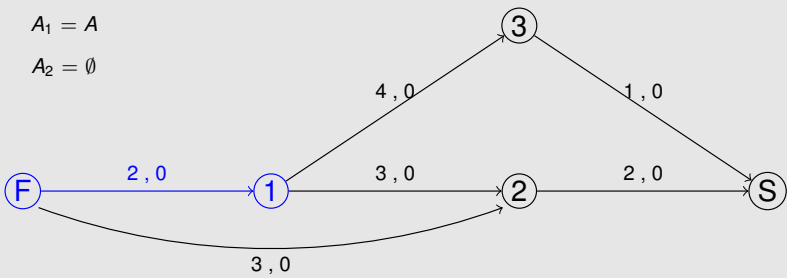
Ejemplo (Paso 2.1: etiquetar el vértice F)

$$A_1 = A$$
$$A_2 = \emptyset$$



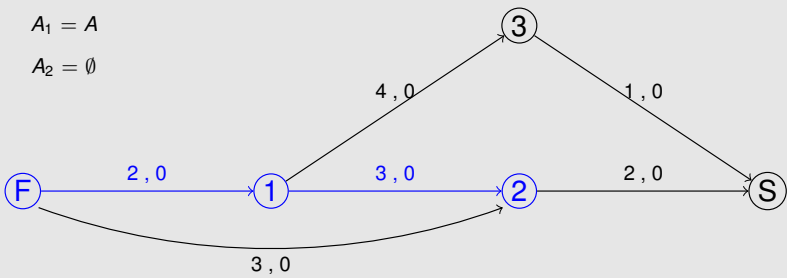
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



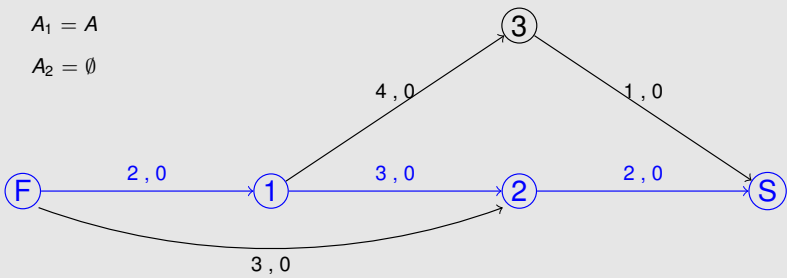
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



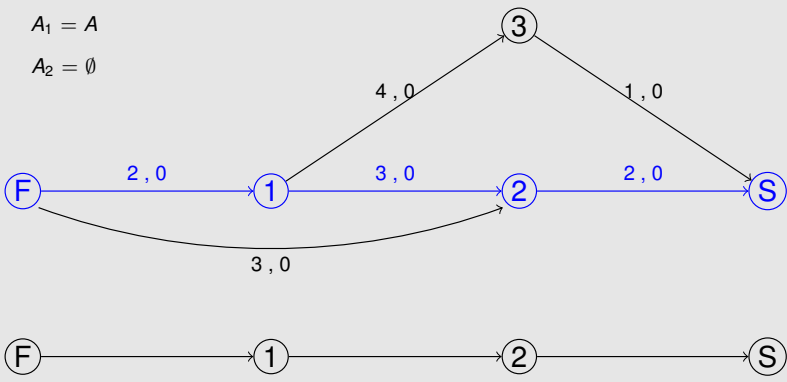
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



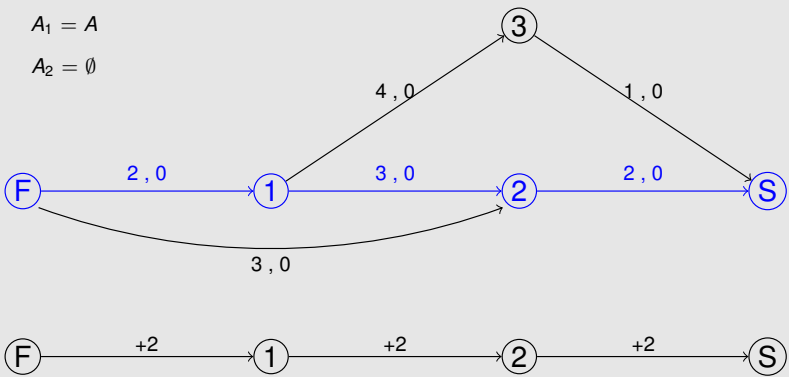
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 3: cadena de flujo aumentable)



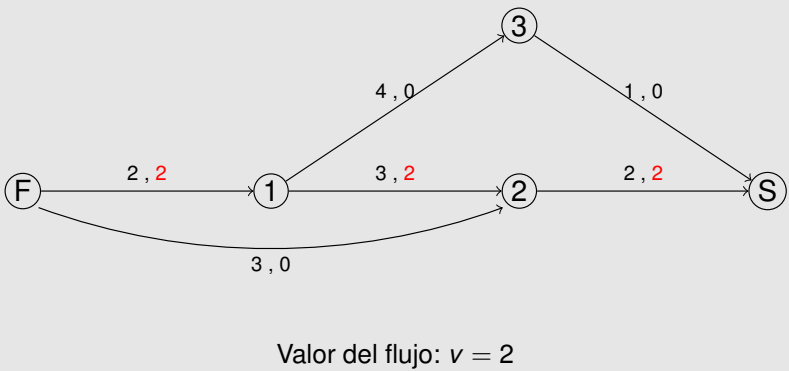
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 3: cadena de flujo aumentable)



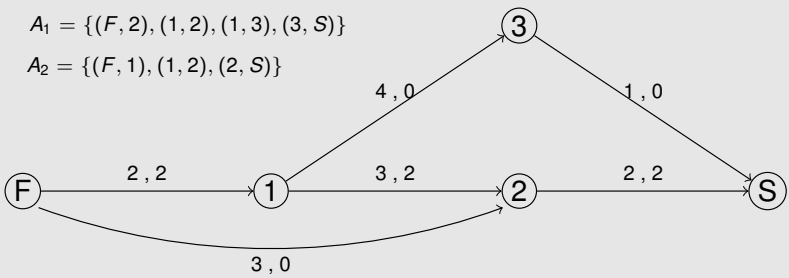
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 1: actualización del flujo)



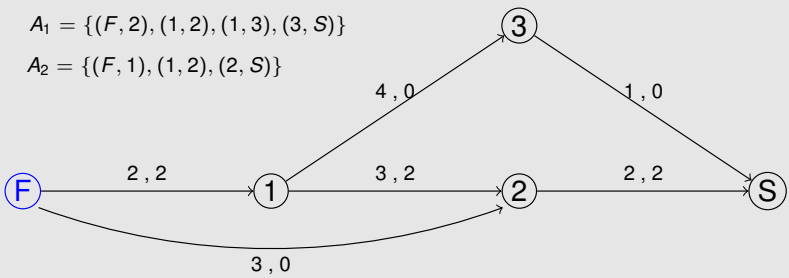
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 2: definir A_1, A_2)



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

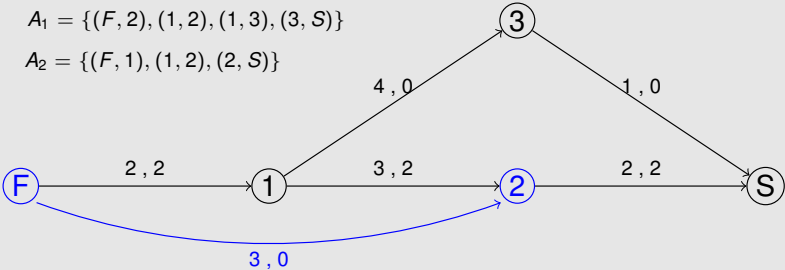
Ejemplo (Paso 2.1: etiquetar el vértice F)



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)

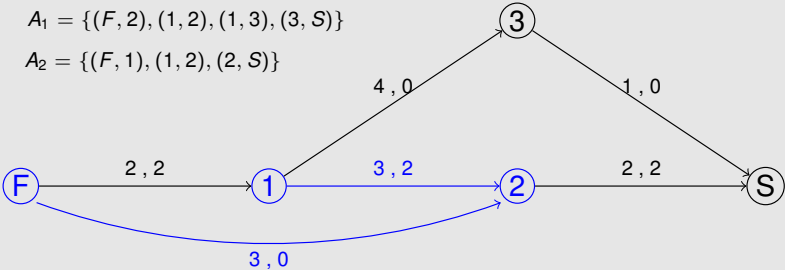
$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)

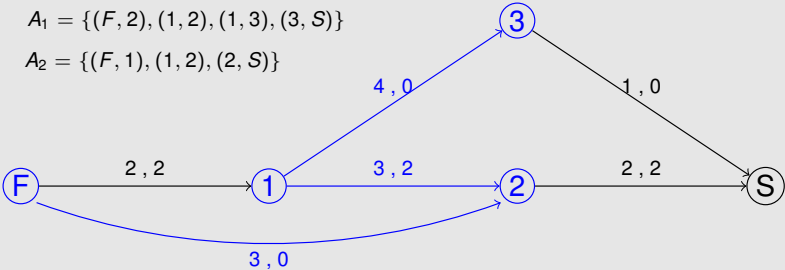
$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)

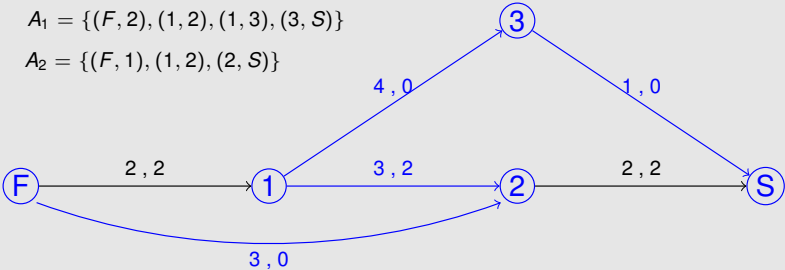
$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)

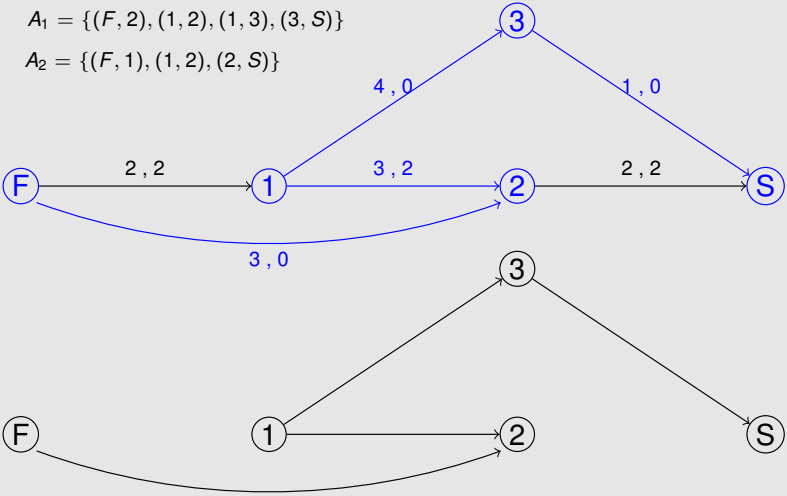
$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 3: cadena de flujo aumentable)

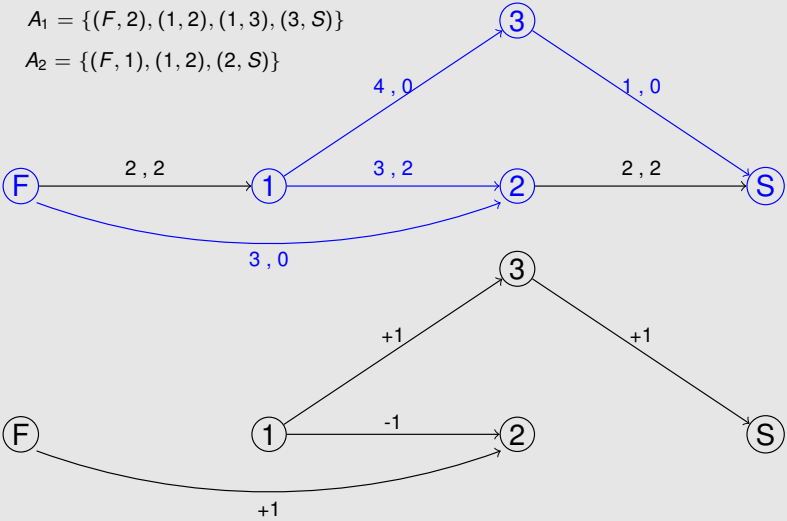
$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

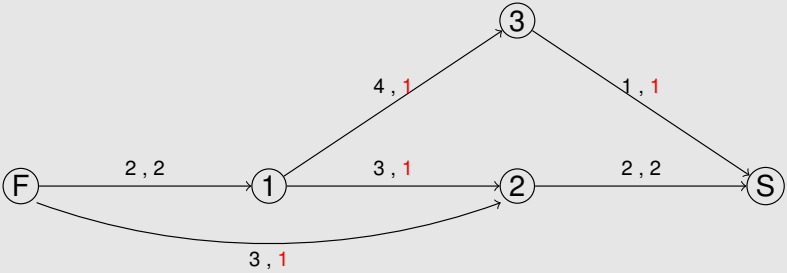
Ejemplo (Paso 3: cadena de flujo aumentable)

$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3), (3, S)\}$
 $A_2 = \{(F, 1), (1, 2), (2, S)\}$



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 1: actualización del flujo)

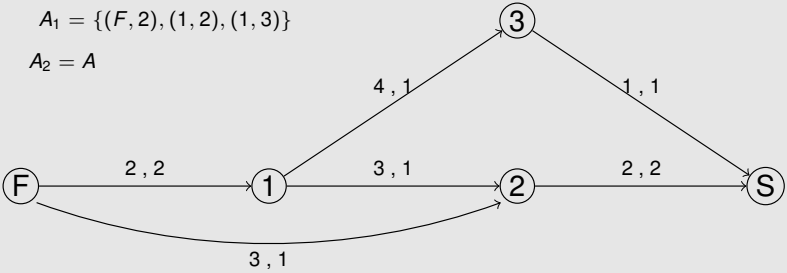


Valor del flujo: $v = 3$

Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

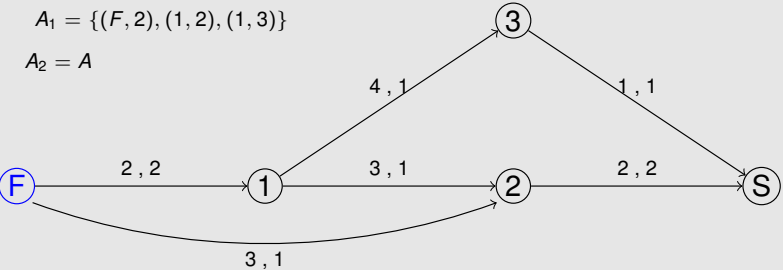
Ejemplo (Paso 2: definir A_1, A_2)

$A_1 = \{(F, 2), (1, 2), (1, 3)\}$
 $A_2 = A$



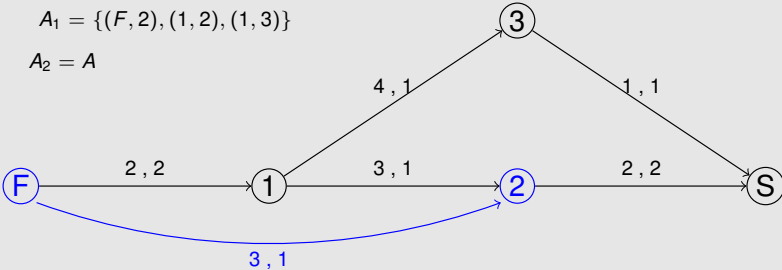
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Paso 2.1: etiquetar el v3rtice F)



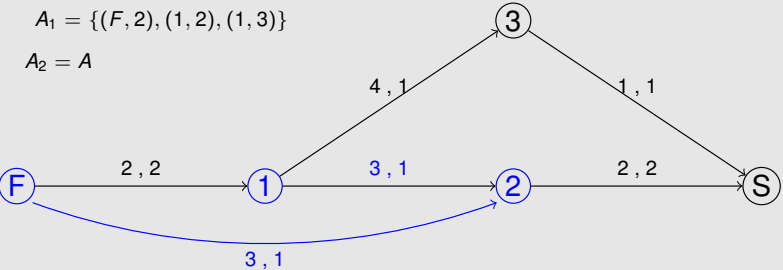
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



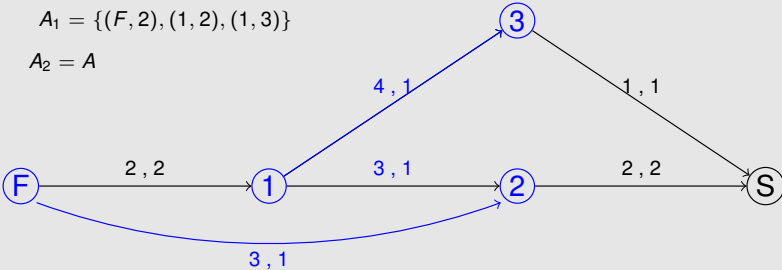
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



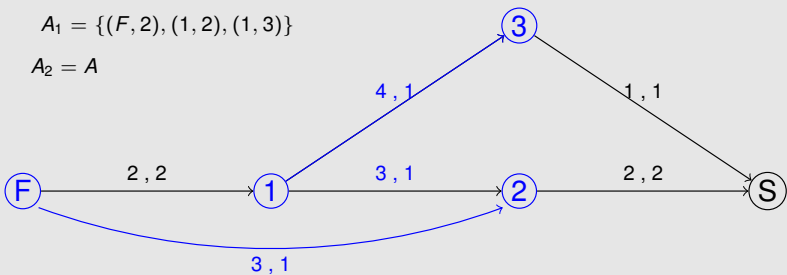
Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

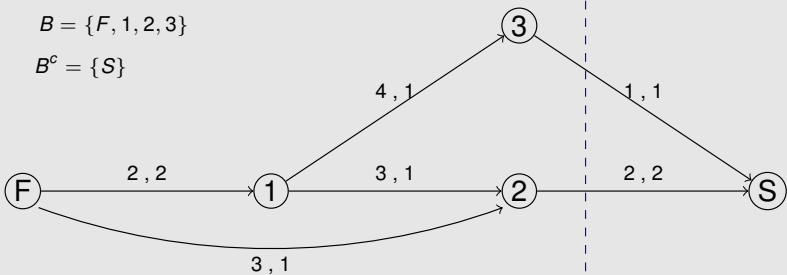
Ejemplo (Pasos 2.2, 2.3, 2.4)



No se puede etiquetar más. Flujo máximo

Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejemplo

Ejemplo (Corte mínimo)



$c(B, B^c) = 2 + 1 = 3 = f(B, B^c)$

Algoritmo de Ford-Fulkerson: Ejercicio

Buscar el flujo máximo en la siguiente red de flujo:

