

Tema 6.2: Camino de Menor Valor

Modelización Matemática
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Ignacio Montes
Departamento de Estadística e I.O. y D.M.

Camino de menor valor

Algoritmos
Algoritmo de Dijkstra
Algoritmo de Bellman-Ford

Cadena de menor valor

CMV: Objetivo

Partimos de una red orientada $R = (V, A, p)$ conexa. Dados dos vértices i y j , podemos considerar los caminos que van desde el vértice i al vértice j .

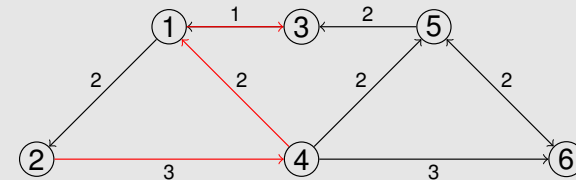
Dado un camino $i \xrightarrow{p_{i,i_1}} i_1 \xrightarrow{p_{i_1,i_2}} i_2 \xrightarrow{p_{i_2,i_3}} \dots \xrightarrow{p_{i_{k-1},i_k}} i_k \xrightarrow{p_{i_k,j}} j$, el **valor del camino** es la suma de los pesos de los arcos que lo forman:

$$p_{i,i_1} + p_{i_1,i_2} + \dots + p_{i_{k-1},i_k} + p_{i_k,j}.$$

El **Camino de Valor Mínimo** es un camino que minimiza el valor del camino.

CMV: ejemplo

Ejemplo



Para ir desde el vértice 2 hasta el vértice 3, tenemos, entre otras, las siguientes opciones:

Camino							Valor		
2	$\xrightarrow{3}$	4	$\xrightarrow{2}$	1	$\xrightarrow{1}$	1	6		
2	$\xrightarrow{3}$	4	$\xrightarrow{2}$	5	$\xrightarrow{2}$	3	7		
2	$\xrightarrow{3}$	4	$\xrightarrow{3}$	6	$\xrightarrow{2}$	5	$\xrightarrow{2}$	3	10

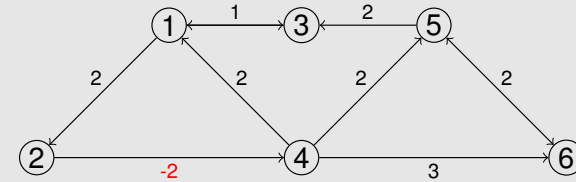
Existencia del CMV

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

Existencia del CMV

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

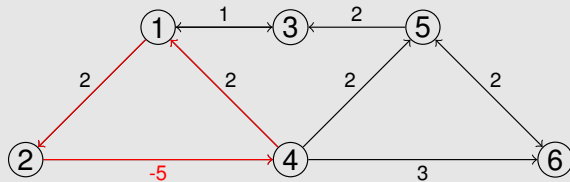
Ejemplo (Red orientada en la que sí existen CMVs)



Existencia del CMV

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

Ejemplo (Red orientada en la que no existen CMVs)



Algoritmos para la búsqueda del CMV

Distinguimos dos casos:

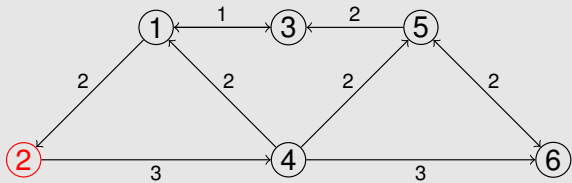
1. **Algoritmo de Dijkstra:** se puede utilizar siempre que los pesos sean no negativos ($p \geq 0$).
2. **Algoritmo de Bellman-Ford:** se utilizará cuando haya algún peso negativo.

Algoritmo de Dijkstra: descripción

- Objetivo:** encontrar un CMV desde el vértice i al resto de vértices.
1. Tomamos $V' = V \setminus \{i\}$, y definimos $d(v) = \infty$ para todo $v \notin V'$.
 2. Para todo $v \in \Gamma(i)$, actualizo $d(v) = p_{i,v}$ y defino $l(v) = i$.
 3. Sea $v \in V'$ de manera que $d(v) = \min\{d(j) \mid j \in V'\}$.
 - 3.1 Actualizo $V' = V \setminus \{v\}$.
 - 3.2 Para todo $j \in \Gamma(v) \cap V'$, actualizo $d(j) = \min\{d(j), d(v) + p_{v,j}\}$ y defino $l(j) = v$.
 4. Itero el paso 3 hasta que V' sea vacío.

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

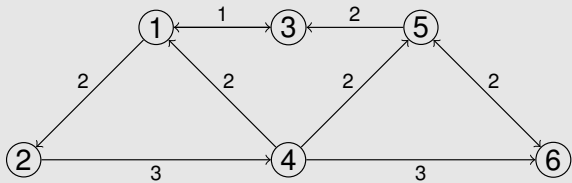
Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	∞	∞	∞	Etapla inicial
l	—	—	—	—	—	

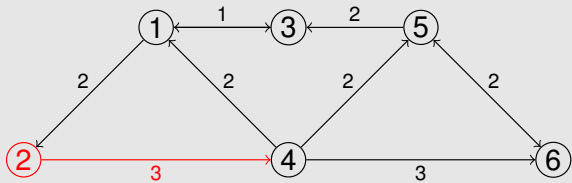
Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

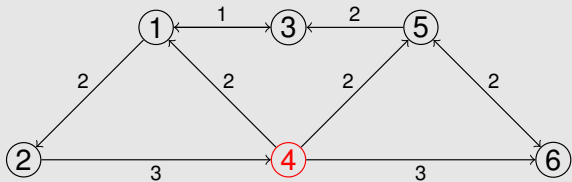
Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapla inicial
l	—	—	2	—	—	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

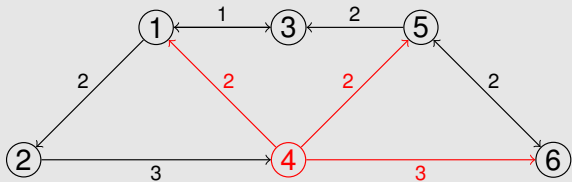
Ejemplo (CMV desde el v3rtice 2 al resto de v3rtices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	∞	∞	3	∞	∞	Primera iteraci3n
l	—	—	2	—	—	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

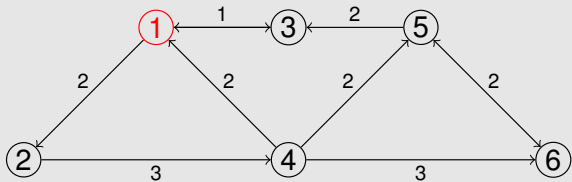
Ejemplo (CMV desde el v3rtice 2 al resto de v3rtices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	5	∞	3	5	6	Primera iteraci3n
l	4	—	2	4	4	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

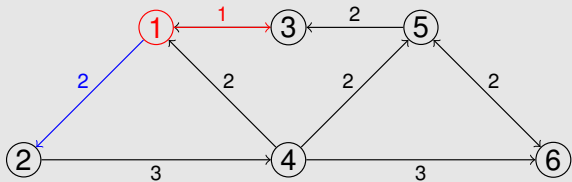
Ejemplo (CMV desde el v3rtice 2 al resto de v3rtices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	5	∞	3	5	6	Primera iteraci3n
l	4	—	2	4	4	
d	5	∞	3	5	6	Segunda iteraci3n
l	4	—	2	4	4	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

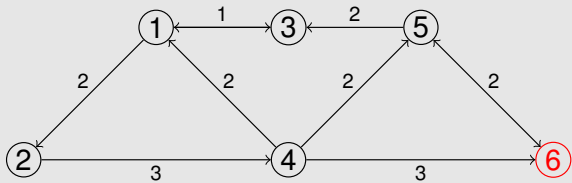
Ejemplo (CMV desde el v3rtice 2 al resto de v3rtices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	5	∞	3	5	6	Primera iteraci3n
l	4	—	2	4	4	
d	5	6	3	5	6	Segunda iteraci3n
l	4	1	2	4	4	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

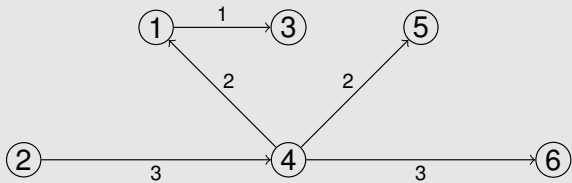
Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	5	∞	3	5	6	Primera iteración
l	4	—	2	4	4	
d	5	6	3	5	6	Segunda iteración
l	4	1	2	4	4	
d	5	6	3	5	6	Tercera iteración
l	4	1	2	4	4	

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



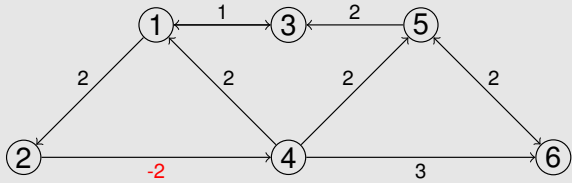
	1	3	4	5	6	
d	∞	∞	3	∞	∞	Etapa inicial
l	—	—	2	—	—	
d	5	∞	3	5	6	Primera iteración
l	4	—	2	4	4	
d	5	6	3	5	6	Segunda iteración
l	4	1	2	4	4	
d	5	6	3	5	6	Tercera iteración
l	4	1	2	4	4	

Algoritmo de Bellman-Ford

- Objetivo:** encontrar un CMV desde el vértice i al resto de vértices.
- Tomamos $V' = V \setminus \{i\}$, y definimos $d(v) = \infty$, $l(v) = \emptyset$ para todo $v \notin V'$. Sea $k = 1$.
 - Para todo vértice $(u, v) \in A$, si $d(v) > d(u) + p_{u,v}$ actualizo:
$$d(v) = \min\{d(v), d(u) + p_{u,v}\}, \quad l(v) = u.$$
 - Si $k = n - 1$, parar. En otro caso, tomar $k = k + 1$ e iterar el paso 2.

Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

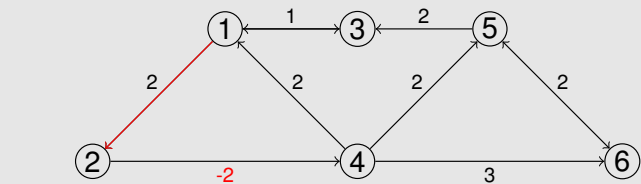
Ejemplo



	1	3	4	5	6	
l	∞	∞	∞	∞	∞	Etapa inicial
d	—	—	—	—	—	

Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo

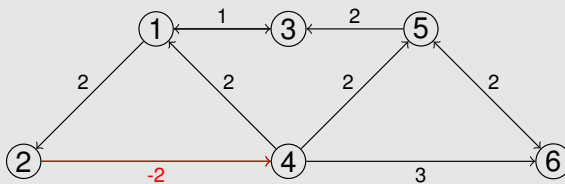


	1	3	4	5	6
<i>l</i>	∞	∞	∞	∞	∞
<i>d</i>	—	—	—	—	—

Etapas 1: vértice 1

Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo

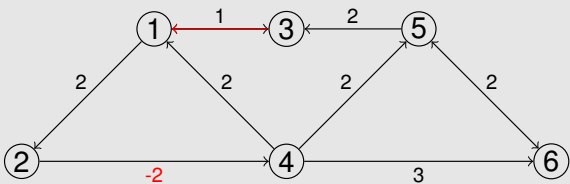


	1	3	4	5	6
<i>l</i>	∞	∞	-2	∞	∞
<i>d</i>	—	—	2	—	—

Etapas 1: vértice 2

Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo

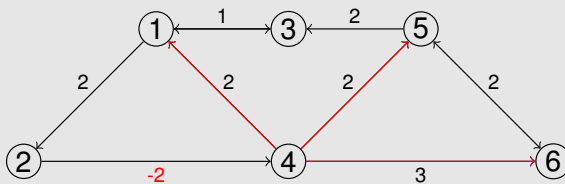


	1	3	4	5	6
<i>l</i>	∞	∞	-2	∞	∞
<i>d</i>	—	—	2	—	—

Etapas 1: vértice 3

Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo

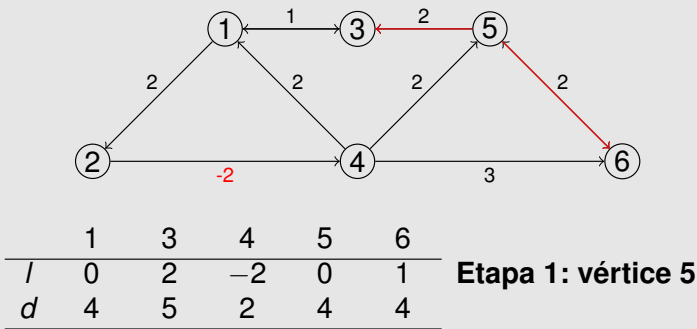


	1	3	4	5	6
<i>l</i>	0	∞	-2	0	1
<i>d</i>	4	—	2	4	4

Etapas 1: vértice 4

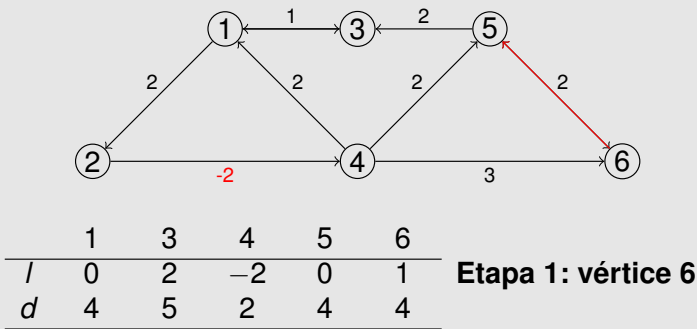
Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo



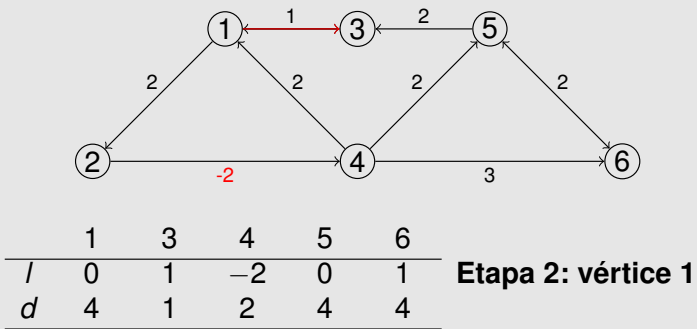
Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo



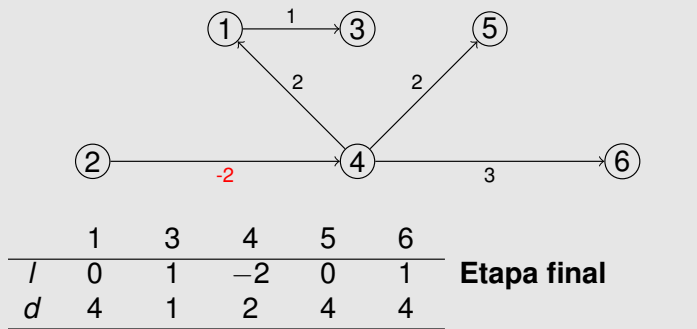
Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo



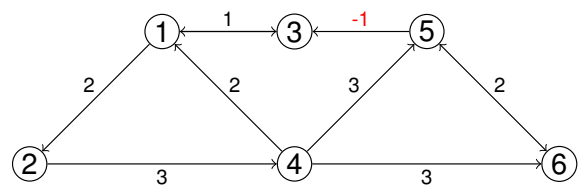
Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

Ejemplo



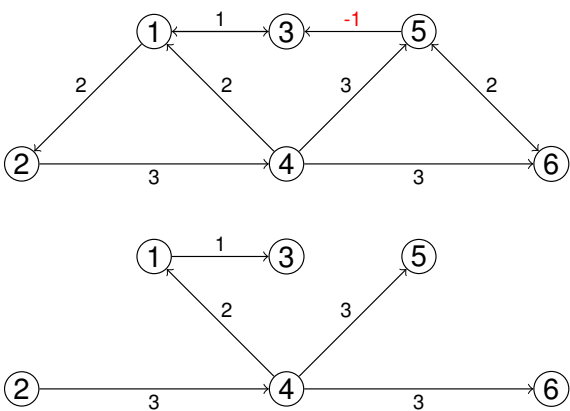
Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



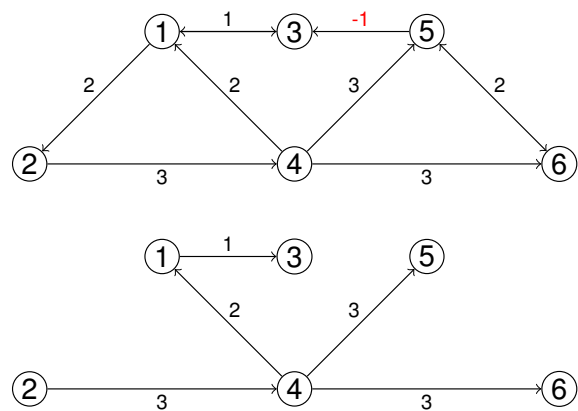
Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



Ejercicio

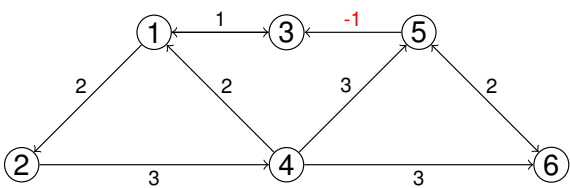
Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



Pero $2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 3$ no es CMV.
El CMV de 2 a 3 es: $2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{-1} 3$.

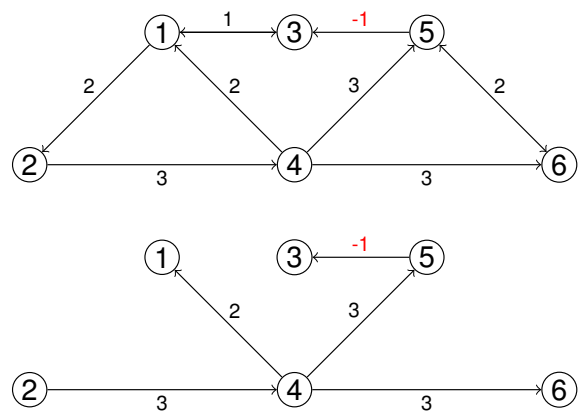
Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:

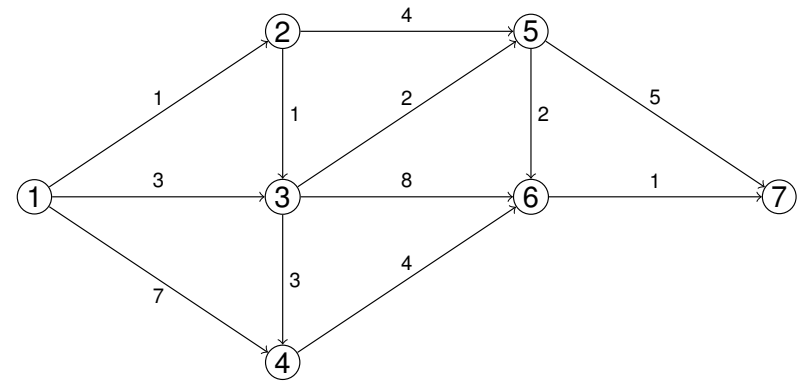


Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



Ejercicio



1. Utiliza el algoritmo de Dijkstra para calcular el CMV partiendo del vértice 1.
2. Añade un arco desde el vértice 4 hasta el vértice 5 con peso -3 y calcula los CMV partiendo desde el vértice 1, esta vez usando el algoritmo de Bellman-Ford.

Cadena de menor valor: Objetivo

Partimos de una red no orientada $R = (V, A, p)$ conexa. Dados dos vértices i y j , podemos consirar las cadenas que van desde el vértice i al vértice j .

Dado una cadena $i \xleftrightarrow{p_{i,i_1}} i_1 \xleftrightarrow{p_{i_1,i_2}} i_2 \xleftrightarrow{p_{i_2,i_3}} \dots \xleftrightarrow{p_{i_{k-1},i_k}} i_k \xleftrightarrow{p_{i_k,j}} j$, el **valor de la cadena** es la suma de los pesos de las aristas que la forman:

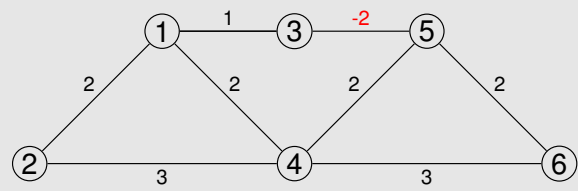
$$p_{i,i_1} + p_{i_1,i_2} + \dots + p_{i_{k-1},i_k} + p_{i_k,j}.$$

La **Cadena de Valor Mínimo** es una cadena que minimiza el valor de la cadena.

Existencia de la CMV

La Cadena de Menor Valor existirá sii no hay aristas de valor negativo.

Ejemplo (Red no orientada en la que no existen CMVs)



Cálculo de Cadenas de Menor Valor

Como todos los pesos son no negativos, se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra. Para ello, cada arista $i \longrightarrow j$ se dobla en dos arcos $i \longrightarrow j$ y $j \longrightarrow i$.