

## Tema 6.2: Camino de menor valor

Modelización Matemática  
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Ignacio Montes  
Departamento de Estadística e I.O. y D.M.

1 Camino de menor valor

2 Algoritmos

- Algoritmo de Dijkstra
- Algoritmo de Bellman-Ford

3 Cadena de menor valor

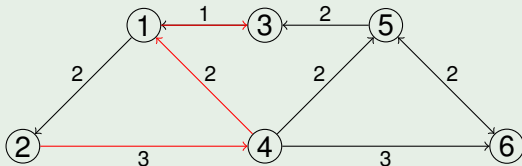
Partimos de una red orientada  $R = (V, A, p)$  conexa. Dados dos vértices  $i$  y  $j$ , podemos considerar los caminos que van desde el vértice  $i$  al vértice  $j$ .

Dado un camino  $i \xrightarrow{p_{i,i_1}} i_1 \xrightarrow{p_{i_1,i_2}} i_2 \xrightarrow{p_{i_2,i_3}} \dots \xrightarrow{p_{i_{k-1},i_k}} i_k \xrightarrow{p_{i_k,j}} j$ , el **valor del camino** es la suma de los pesos de los arcos que lo forman:

$$p_{i,i_1} + p_{i_1,i_2} + \dots + p_{i_{k-1},i_k} + p_{i_k,j}.$$

El **Camino de Valor Mínimo** es un camino que minimiza el valor del camino.

## Ejemplo



Para ir desde el vértice 2 hasta el vértice 3, tenemos, entre otras, las siguientes opciones:

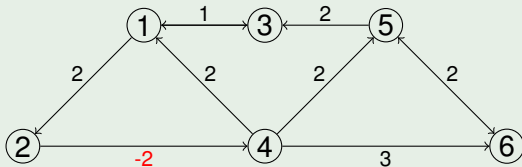
| Camino |                   |   |                   |   |                   |   | Valor             |   |    |
|--------|-------------------|---|-------------------|---|-------------------|---|-------------------|---|----|
| 2      | $\xrightarrow{3}$ | 4 | $\xrightarrow{2}$ | 1 | $\xrightarrow{1}$ | 1 | 6                 |   |    |
| 2      | $\xrightarrow{3}$ | 4 | $\xrightarrow{2}$ | 5 | $\xrightarrow{2}$ | 3 | 7                 |   |    |
| 2      | $\xrightarrow{3}$ | 4 | $\xrightarrow{3}$ | 6 | $\xrightarrow{2}$ | 5 | $\xrightarrow{2}$ | 3 | 10 |

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

# Existencia del CMV

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

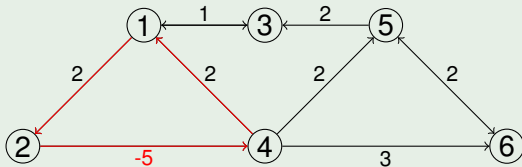
Ejemplo ( Red orientada en la que sí existen CMVs)



# Existencia del CMV

El Camino de Menor Valor existirá sii no hay ciclos de valor negativo.

Ejemplo ( Red orientada en la que no existen CMVs)



Distinguimos dos casos:

- 1 **Algoritmo de Dijkstra:** se puede utilizar siempre que los pesos sean no negativos ( $p \geq 0$ ).
- 2 **Algoritmo de Bellman-Ford:** se utilizará cuando haya algún peso negativo.



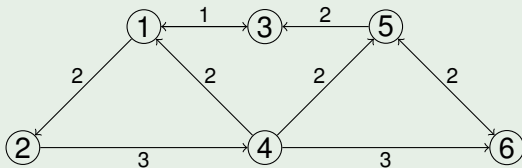
# Algoritmo de Dijkstra: descripción

**Objetivo:** encontrar un CMV desde el vértice  $i$  al resto de vértices.

- 1 Tomamos  $V' = V \setminus \{i\}$ , y definimos  $d(v) = \infty$  para todo  $v \notin V'$ .
- 2 Para todo  $v \in \Gamma(i)$ , actualizo  $d(v) = p_{i,v}$  y defino  $l(v) = i$ .
- 3 Sea  $v \in V'$  de manera que  $d(v) = \min\{d(j) \mid j \in V'\}$ .
  - 1 Actualizo  $V' = V \setminus \{v\}$ .
  - 2 Para todo  $j \in \Gamma(v) \cap V'$ , actualizo  $d(j) = \min\{d(j), d(v) + p_{v,j}\}$  y defino  $l(j) = v$ .
- 4 Itero el paso 3 hasta que  $V'$  sea vacío.

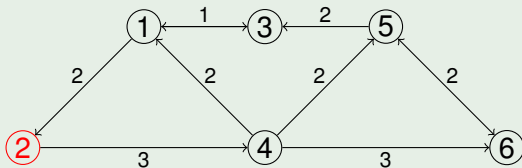
# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)

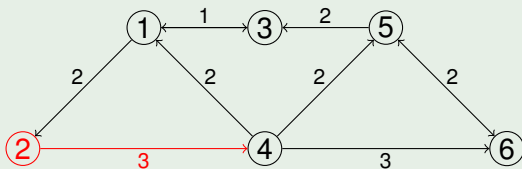


|     | 1        | 3        | 4        | 5        | 6        |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $d$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $l$ | —        | —        | —        | —        | —        |

**Etapla inicial**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)

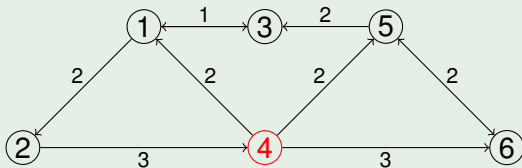


|     | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|-----|----------|----------|---|----------|----------|
| $d$ | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| $l$ | —        | —        | 2 | —        | —        |

**Etapla inicial**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



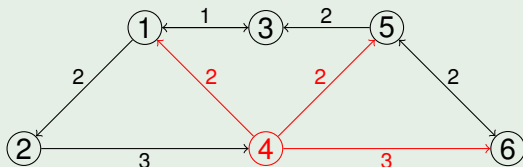
|     | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|-----|----------|----------|---|----------|----------|
| $d$ | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| $l$ | —        | —        | 2 | —        | —        |
| $d$ | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| $l$ | —        | —        | 2 | —        | —        |

**Etapla inicial**

**Primera iteración**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



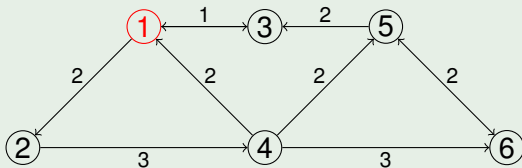
|     | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|-----|----------|----------|---|----------|----------|
| $d$ | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| $l$ | —        | —        | 2 | —        | —        |
| $d$ | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        |
| $l$ | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |

**Etapla inicial**

**Primera iteración**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



|          | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|
| <i>d</i> | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>l</i> | —        | —        | 2 | —        | —        |
| <i>d</i> | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |
| <i>d</i> | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |

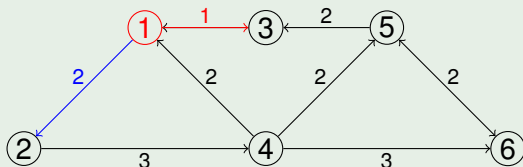
**Etapla inicial**

**Primera iteración**

**Segunda iteración**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



|          | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|
| <i>d</i> | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>l</i> | —        | —        | 2 | —        | —        |
| <i>d</i> | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |
| <i>d</i> | 5        | 6        | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | 1        | 2 | 4        | 4        |

**Etapla inicial**

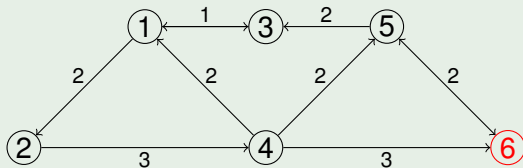
**Primera iteración**

**Segunda iteración**



# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



|          | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|
| <i>d</i> | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>l</i> | —        | —        | 2 | —        | —        |
| <i>d</i> | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |
| <i>d</i> | 5        | 6        | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | 1        | 2 | 4        | 4        |
| <i>d</i> | 5        | 6        | 3 | 5        | 6        |
| <i>l</i> | 4        | 1        | 2 | 4        | 4        |

**Etapla inicial**

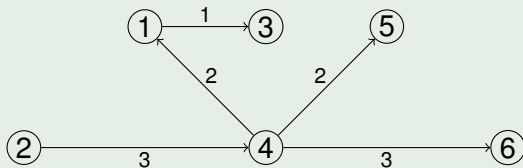
**Primera iteración**

**Segunda iteración**

**Tercera iteración**

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

## Ejemplo (CMV desde el vértice 2 al resto de vértices)



|          | 1        | 3        | 4 | 5        | 6        |                          |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|--------------------------|
| <i>d</i> | $\infty$ | $\infty$ | 3 | $\infty$ | $\infty$ | <b>Etapla inicial</b>    |
| <i>l</i> | —        | —        | 2 | —        | —        |                          |
| <i>d</i> | 5        | $\infty$ | 3 | 5        | 6        | <b>Primera iteración</b> |
| <i>l</i> | 4        | —        | 2 | 4        | 4        |                          |
| <i>d</i> | 5        | 6        | 3 | 5        | 6        | <b>Segunda iteración</b> |
| <i>l</i> | 4        | 1        | 2 | 4        | 4        |                          |
| <i>d</i> | 5        | 6        | 3 | 5        | 6        | <b>Tercera iteración</b> |
| <i>l</i> | 4        | 1        | 2 | 4        | 4        |                          |

**Objetivo:** encontrar un CMV desde el vértice  $i$  al resto de vértices.

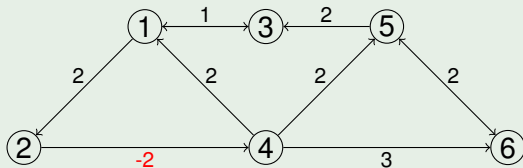
- 1 Tomamos  $V' = V \setminus \{i\}$ , y definimos  $d(v) = \infty$ ,  $l(v) = \emptyset$  para todo  $v \notin V'$ . Sea  $k = 1$ .
- 2 Para todo vértice  $(u, v) \in A$ , si  $d(v) > d(u) + p_{u,v}$  actualizo:

$$d(v) = \min\{d(v), d(u) + p_{u,v}\}, \quad l(v) = u.$$

- 3 Si  $k = n - 1$ , parar. En otro caso, tomar  $k = k + 1$  e iterar el paso 2.

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

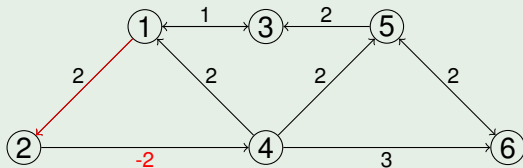


|     | 1        | 3        | 4        | 5        | 6        |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $l$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $d$ | —        | —        | —        | —        | —        |

**Etapla inicial**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

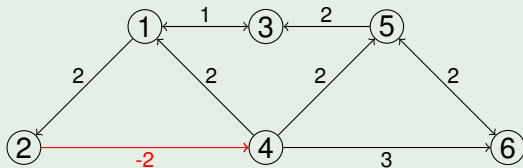


|          | 1        | 3        | 4        | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>l</i> | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>d</i> | —        | —        | —        | —        | —        |

**Etapas 1: vértice 1**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

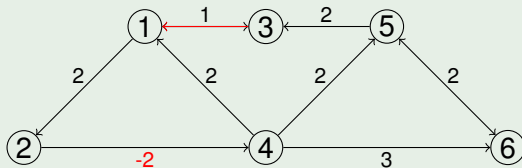


|          | 1        | 3        | 4  | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|----|----------|----------|
| <i>l</i> | $\infty$ | $\infty$ | -2 | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>d</i> | —        | —        | 2  | —        | —        |

**Etapas 1: vértice 2**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

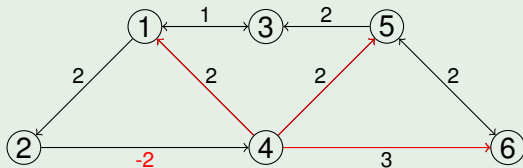


|          | 1        | 3        | 4    | 5        | 6        |
|----------|----------|----------|------|----------|----------|
| <i>l</i> | $\infty$ | $\infty$ | $-2$ | $\infty$ | $\infty$ |
| <i>d</i> | —        | —        | 2    | —        | —        |

**Etapas 1: vértice 3**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo



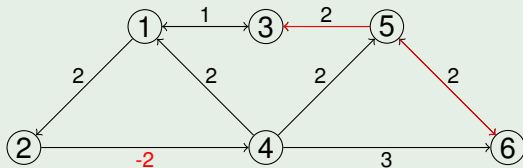
|          | 1 | 3        | 4  | 5 | 6 |
|----------|---|----------|----|---|---|
| <i>l</i> | 0 | $\infty$ | -2 | 0 | 1 |
| <i>d</i> | 4 | —        | 2  | 4 | 4 |

**Etapas 1: vértice 4**



# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

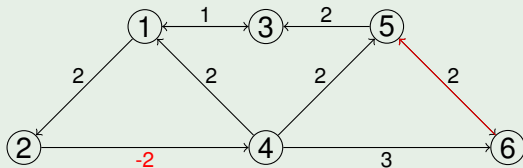


|          | 1 | 3 | 4  | 5 | 6 |
|----------|---|---|----|---|---|
| <i>l</i> | 0 | 2 | -2 | 0 | 1 |
| <i>d</i> | 4 | 5 | 2  | 4 | 4 |

**Etapas 1: vértice 5**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

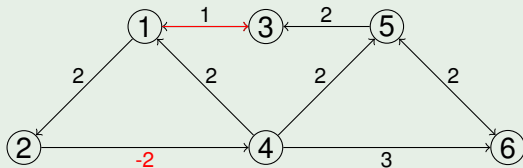


|          | 1 | 3 | 4  | 5 | 6 |
|----------|---|---|----|---|---|
| <i>l</i> | 0 | 2 | -2 | 0 | 1 |
| <i>d</i> | 4 | 5 | 2  | 4 | 4 |

**Etapas 1: vértice 6**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

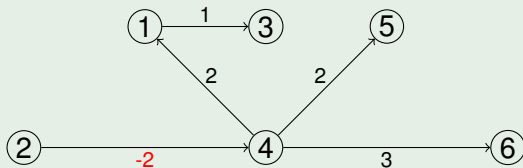


|          | 1 | 3 | 4  | 5 | 6 |
|----------|---|---|----|---|---|
| <i>l</i> | 0 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| <i>d</i> | 4 | 1 | 2  | 4 | 4 |

**Etapla 2: vértice 1**

# Algoritmo de Bellman-Ford: ejemplo

## Ejemplo

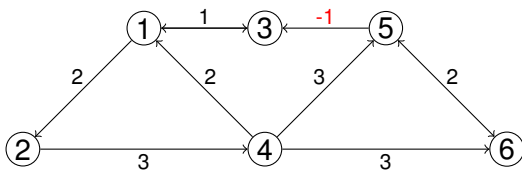


|          | 1 | 3 | 4  | 5 | 6 |
|----------|---|---|----|---|---|
| <i>l</i> | 0 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| <i>d</i> | 4 | 1 | 2  | 4 | 4 |

**Etapas final**

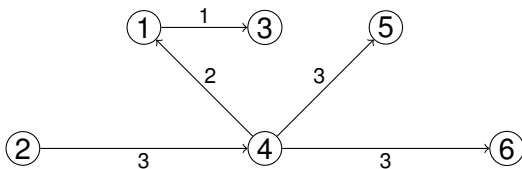
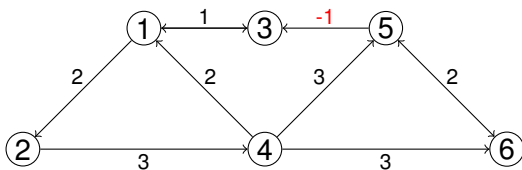
# Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



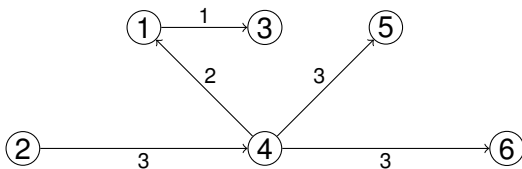
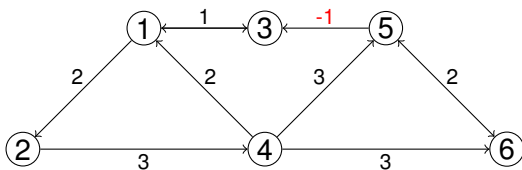
# Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



# Ejercicio

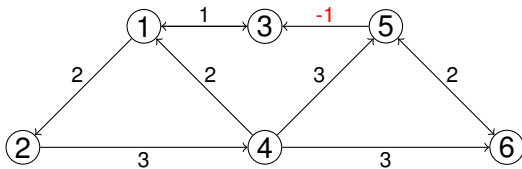
Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



Pero  $2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 3$  no es CMV.  
El CMV de 2 a 3 es:  $2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{-1} 3$ .

# Ejercicio

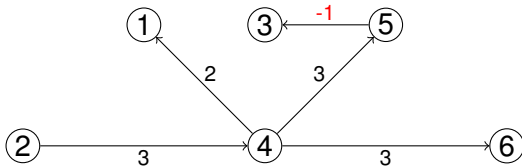
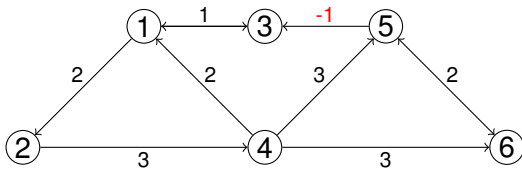
Utilizar el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



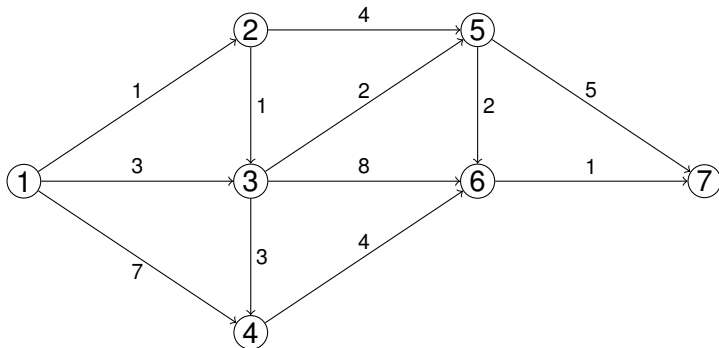


# Ejercicio

Utilizar el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar el CMV desde el vértice 2 al resto de los vértices:



# Ejercicio



- 1 Utiliza el algoritmo de Dijkstra para calcular el CMV partiendo del vértice 1.
- 2 Añade un arco desde el vértice 4 hasta el vértice 5 con peso -3 y calcula los CMV partiendo desde el vértice 1, esta vez usando el algoritmo de Bellman-Ford.

# Cadena de menor valor: Objetivo

Partimos de una red no orientada  $R = (V, A, p)$  conexa. Dados dos vértices  $i$  y  $j$ , podemos considerar las cadenas que van desde el vértice  $i$  al vértice  $j$ .

Dado una cadena  $i \xleftrightarrow{p_{i,i_1}} i_1 \xleftrightarrow{p_{i_1,i_2}} i_2 \xleftrightarrow{p_{i_2,i_3}} \dots \xleftrightarrow{p_{i_{k-1},i_k}} i_k \xleftrightarrow{p_{i_k,j}} j$ , el **valor de la cadena** es la suma de los pesos de las aristas que la forman:

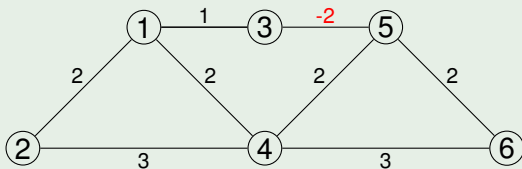
$$p_{i,i_1} + p_{i_1,i_2} + \dots + p_{i_{k-1},i_k} + p_{i_k,j}.$$

La **Cadena de Valor Mínimo** es una cadena que minimiza el valor de la cadena.

# Existencia de la CMV

La Cadena de Menor Valor existirá sii no hay aristas de valor negativo.

Ejemplo (Red no orientada en la que no existen CMVs)



Como todos los pesos son no negativos, se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra. Para ello, cada arista  $i \longrightarrow j$  se dobla en dos arcos  $i \longrightarrow j$  y  $j \longrightarrow i$ .