

Tema 5: Introducción a la Teoría de grafos

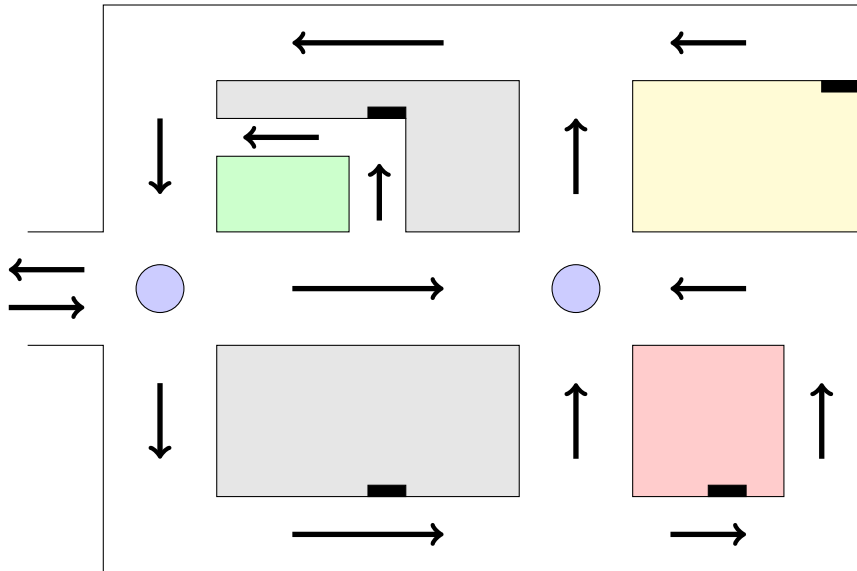
Modelización Matemática
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Ignacio Montes
Departamento de Estadística e I.O. y D.M.

¿Qué vamos a hacer en este tema?

- Introducir los conceptos básicos de la Teoría de Grafos.
 - Grafos.
 - Redes.
 - Representaciones matriciales.
 - ...
- Aprender a modelar problemas mediante grafos.
- Conectividad...
 - ...en grafos orientados;
 - ...en grafos no orientados.

Ejemplo



1 Grafos

2 Definiciones básicas

- Grafos orientados
- Grafos no orientados
- Representación matricial

3 Conexión

- Conexión en grafos no orientados
- Conexión en grafos orientados

4 Redes

Un **Grafo** es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de vértices y A es un conjunto de aristas. Número de vértices: n , número de aristas: m .

Ejemplo

G es un grafo con $n = 8$ vértices y las siguientes aristas:

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (7, 8).$

Un **Grafo** es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de vértices y A es un conjunto de aristas. Número de vértices: n , número de aristas: m .

Ejemplo

G es un grafo con $n = 8$ vértices y las siguientes aristas:

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (7, 8).$



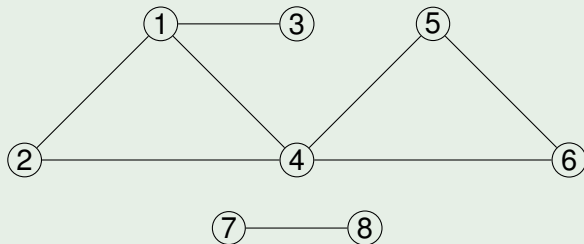
Grafo

Un **Grafo** es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de vértices y A es un conjunto de aristas. Número de vértices: n , número de aristas: m .

Ejemplo

G es un grafo con $n = 8$ vértices y las siguientes aristas:

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$.

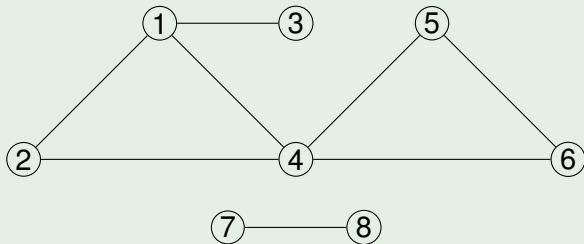


Tipos de grafos

Según haya un orden o no en las aristas, distinguimos dos tipos de grafos:

Grafo no orientado o no dirigido Son aquellos grafos en los en el orden de los pares en las aristas no es importante.

Ejemplo (Grafo no orientado)



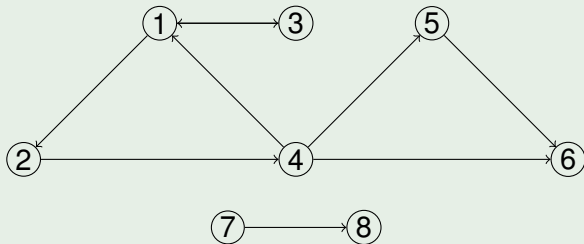
Tipos de grafos

Según haya un orden o no en las aristas, distinguimos dos tipos de grafos:

Grafo no orientado o no dirigido Son aquellos grafos en los en el orden de los pares en las aristas no es importante.

Grafo orientado o dirigido Son aquellos grafos en los en las aristas importa el orden de los pares.

Ejemplo (Grafo orientado)



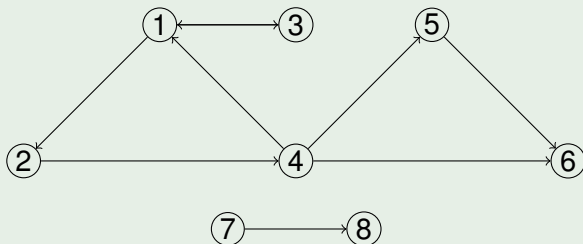
Grafos orientados

- En grafos orientados, las aristas $e = (x, y)$ recibirán el nombre de **arcos**, y se denotarán por $x \rightarrow y$.
- Dado un arco $x \rightarrow y$, x se llamará **vértice inicial** e y **vértice final**.

Grafos orientados

- En grafos orientados, las aristas $e = (x, y)$ recibirán el nombre de **arcos**, y se denotarán por $x \rightarrow y$.
- Dado un arco $x \rightarrow y$, x se llamará **vértice inicial** e y **vértice final**.
- Un arco (x, x) , es decir, un arco donde los vértices inicial y final coinciden, se llama **bucle**.

Ejemplo (Grafo sin bucles)

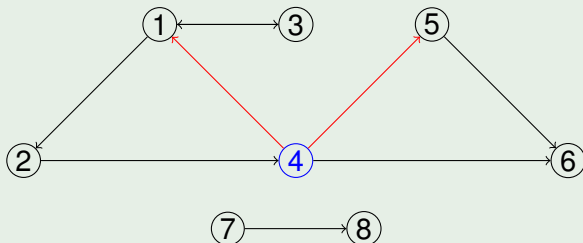


Grafos orientados: adyacencia

- Dos arcos se llaman **arcos adyacentes** si tienen un vértice en común.

Ejemplo

Los arcos $(4,1)$ y $(4,5)$ son adyacentes (vértice 4 común).

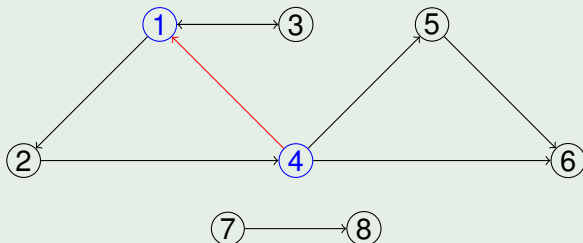


Grafos orientados: adyacencia

- Dos arcos se llaman **arcos adyacentes** si tienen un vértice en común.
- Dos vértices se dicen **adyacentes** si hay un arco que los conecta.

Ejemplo

Los vértices 1 y 4 son adyacentes (están conectados por $(4,1)$).

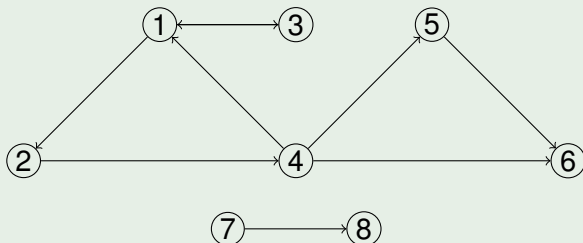


Grafos orientados: adyacencia

- Dos arcos se llaman **arcos adyacentes** si tienen un vértice en común.
- Dos vértices se dicen **adyacentes** si hay un arco que los conecta.
- Un vértice se llama **aislado** si no adyacentes a ningún otro vértice.

Ejemplo

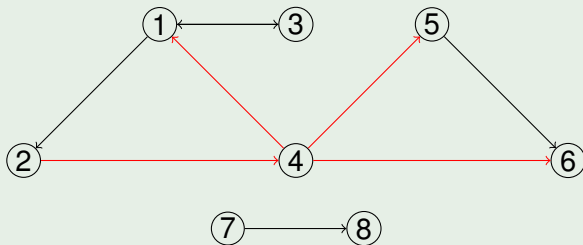
En este grafo no hay vértices aislados.



Grafos orientados: incidencia

- Un arco cuya vértice inicial o final es x se dice **incidente en x** .

Ejemplo (Incidencia)

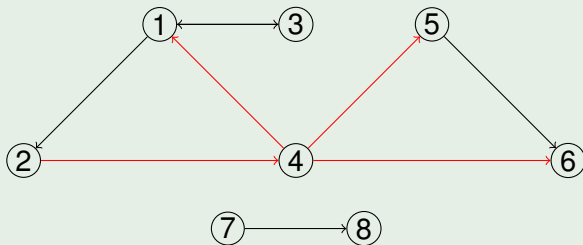


Grafos orientados: incidencia

- Un arco cuya vértice inicial o final es x se dice **incidente en** x .
- El **grado de incidencia** de un vértice x , denotado por $g(x)$, es el número de arcos incidentes en él.

Ejemplo (Incidencia)

$$g(4) = 4$$

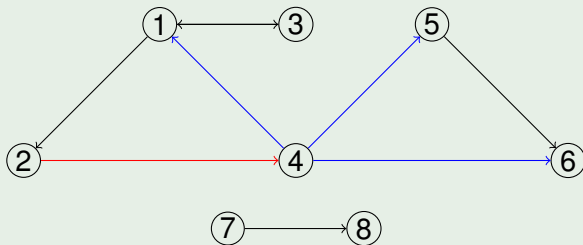


Grafos orientados: incidencia

- Un arco cuya vértice inicial o final es x se dice **incidente en** x .
- El **grado de incidencia** de un vértice x , denotado por $g(x)$, es el número de arcos incidentes en él.
- El **grado de incidencia** de salida (entrada) de un vértice x , denotado por $g^+(x)$ ($g^-(x)$), es el número de arcos que tienen a x como vértice inicial (final).

Ejemplo (Incidencia)

$$g(4) = 4, g^+(4) = 3, g^-(4) = 1.$$

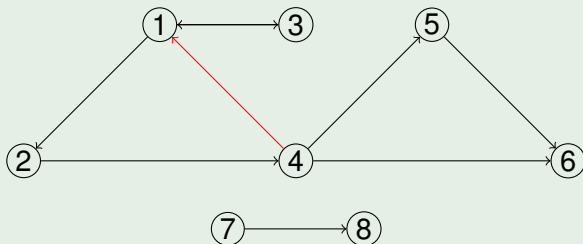


Grafos orientados: sucesor y antecesor

- Si (x, y) es un arco $(x \rightarrow y)$, y se llama **sucesor** de x y x se llama **antecesor/predecesor** de y .

Ejemplo

Como $(4, 1)$ es un arco, 1 es sucesor de 4 y 4 es antecesor de 1.

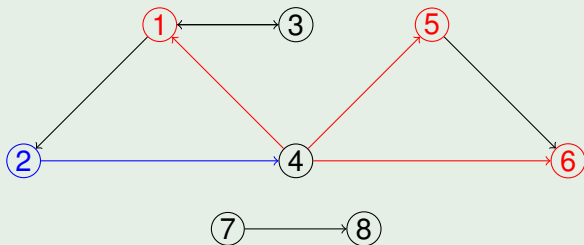


Grafos orientados: sucesor y antecesor

- Si (x, y) es un arco $(x \rightarrow y)$, y se llama **sucesor** de x y x se llama **antecesor/predecesor** de y .
- $\Gamma(x)$ y $\Gamma^-(x)$ denotan los sucesores y predecesores, respectivamente, del vértice x .

Ejemplo

Como $(4, 1)$ es un arco, 1 es sucesor de 4 y 4 es antecesor de 1.
 $\Gamma(4) = \{1, 4, 5\}$ y $\Gamma^-(4) = \{2\}$.

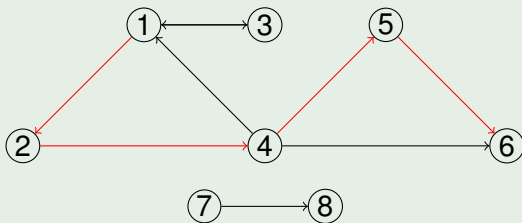


Grafos orientados: caminos

- Un **caminio** de x_1 a x_k es una sucesión de vértices y arcos desde x_1 hasta x_k : $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{k-1}, x_k$, donde $e_i = (x_i, x_{i+1})$.

Ejemplo

Algunos caminos de 1 a 6 son: 1-2-4-5-6, 1-3-1-2-4-6, 1-2-4-1-2-4-6.

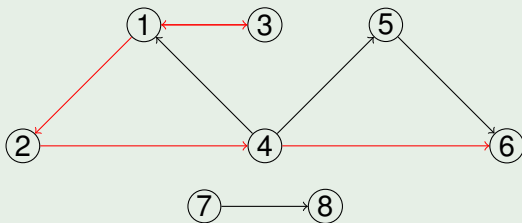


Grafos orientados: caminos

- Un **caminio** de x_1 a x_k es una sucesión de vértices y arcos desde x_1 hasta x_k : $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{k-1}, x_k$, donde $e_i = (x_i, x_{i+1})$.

Ejemplo

Algunos caminos de 1 a 6 son: 1-2-4-5-6, 1-3-1-2-4-6, 1-2-4-1-2-4-6.

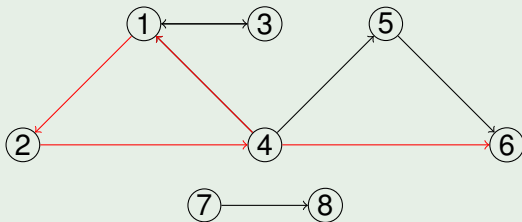


Grafos orientados: caminos

- Un **caminio** de x_1 a x_k es una sucesión de vértices y arcos desde x_1 hasta x_k : $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{k-1}, x_k$, donde $e_i = (x_i, x_{i+1})$.

Ejemplo

Algunos caminos de 1 a 6 son: 1-2-4-5-6, 1-3-1-2-4-6, 1-2-4-1-2-4-6.

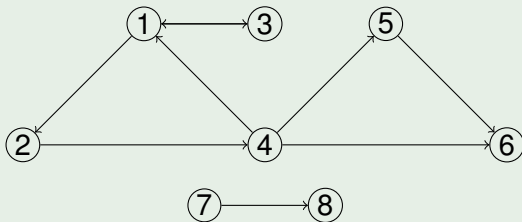


Grafos orientados: caminos

- Un **camino** de x_1 a x_k es una sucesión de vértices y arcos desde x_1 hasta x_k : $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{k-1}, x_k$, donde $e_i = (x_i, x_{i+1})$.
- La **longitud** de un camino es el número de arcos que lo forman.

Ejemplo

Algunos caminos de 1 a 6 son: 1-2-4-5-6, 1-3-1-2-4-6, 1-2-4-1-2-4-6.

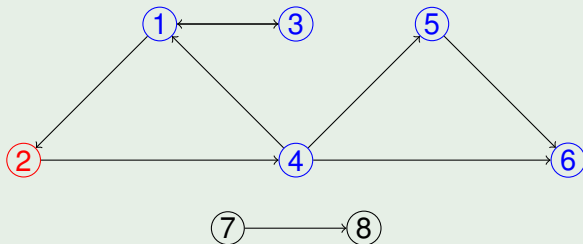


Grafos orientados: alcanzabilidad

- Un vértice y es **alcanzable** desde x si hay un camino de x a y . y se llamará **descendiente** de x . $DS(x)$ denota el conjunto de descendientes de x .

Ejemplo

$$DS(2) = \{1, 4, 5, 6, 3\}$$

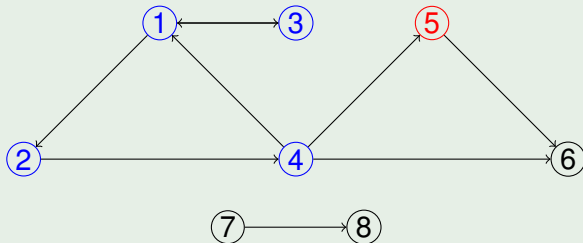


Grafos orientados: alcanzabilidad

- Un vértice y es **alcanzable** desde x si hay un camino de x a y . y se llamará **descendiente** de x . $DS(x)$ denota el conjunto de descendientes de x .
- x se llama **ascendente** de y . $AS(x)$ denota el conjunto de ascendientes de x .

Ejemplo

$DS(2) = \{1, 4, 5, 6, 3\}$, $AS(5) = \{1, 2, 3, 4\}$.

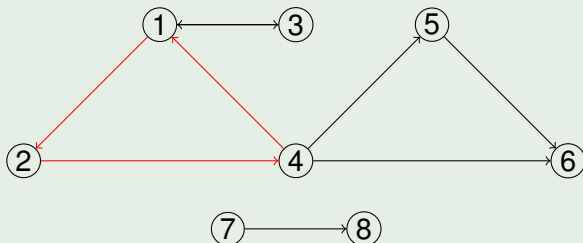


Grafos orientados: circuito

- Un **circuito** es un camino donde coinciden el vértice inicial y final.

Ejemplo (Circuitos)

Circuito: 1-2-4-1.

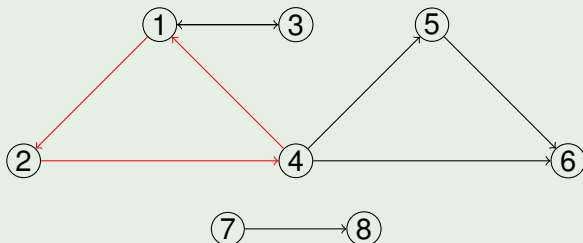


Grafos orientados: circuito

- Un **circuito** es un camino donde coinciden el vértice inicial y final.
- Al igual que para los caminos, la **longitud** del circuito es el número de arcos que lo componen.

Ejemplo (Circuitos)

Circuito: 1-2-4-1. Longitud del circuito: 3 (arco (1,2), arco (2,4) y arco (4,1)).



Ejercicio

Consider el grafo orientado $G = (V, A)$ dado por $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y A :

$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6).$

Se pide:

- 1 Haz la representación gráfica de $G = (V, A)$.
- 2 ¿Hay bucles? ¿Hay vértices aislados?
- 3 ¿Son adyacentes los vértices 1 y 4?
- 4 Calculo los grados de indicencia del vértice 3.
- 5 Calcula los sucesores, predecesores, descendientes y ascendientes del vértice 4.
- 6 Construye un camino de longitud 3.
- 7 ¿Hay circuitos?

Grafos no orientados

- Una **cadena** entre los vértices x e y es una sucesión de vértices y aristas que van desde x a y (o desde y hasta x).
- Un **ciclo** es una cadena donde coinciden los vértices de salida y llegada.
- El **grado de incidencia** de un vértice x es el número de aristas que incluyen a x . En grafos no orientados, no tiene sentido definir grados de incidencia de entrada o salida.

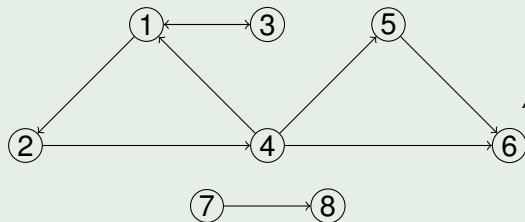
Grafo orientado	Grafo no orientado
camino	cadena
circuito	ciclo
grado de incidencia grado de incidencia de salida grado de incidencia de entrada	grado de incidencia

Matriz de adyacencia

La **matriz de adyacencia** del grafo G , denotada por $A(G)$, es una matriz $n \times n$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i, j) \in A. \\ 0, & \text{if } (i, j) \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia

- Si G es no orientado, la matriz es simétrica y $g(i)$ es la suma de la fila i o de la columna i .
- Si G es orientado, $g^+(i)$ es la suma de la fila i y $g^-(i)$ es la suma de la columna i . $\Gamma(i)$ está formado por los vértices asociados a las columnas con 1 en la fila i y $\Gamma^-(i)$ está formado por los vértices asociados a las filas con un 1 en la columna i .

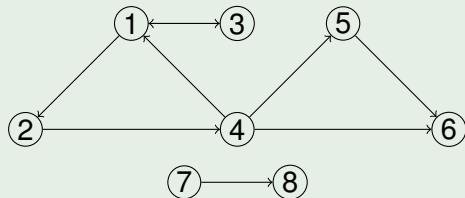
	0	1	1	0	0	0	0	0	$g^+(i)$
	0	0	0	1	0	0	0	0	2
	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	1	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	1	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$g^-(i)$	2	1	1	1	1	2	0	1	0

Matriz de adyacencia

Teorema

Si G es un grafo simple y $A(G)^p$ denota la potencia p -ésima de la matriz de adyacencia de G , el valor (a_{ij}^p) es el número de caminos que hay de longitud p desde i hasta j .

Ejemplo



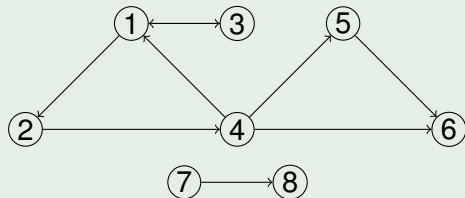
$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia

Teorema

Si G es un grafo simple y $A(G)^p$ denota la potencia p -ésima de la matriz de adyacencia de G , el valor (a_{ij}^p) es el número de caminos que hay de longitud p desde i hasta j .

Ejemplo



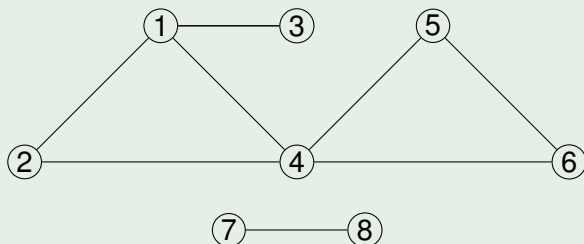
$$A(G)^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conexión para grafos no orientados

Un grafo no orientado es **conexo** si todo par de vértices pueden ser unidos por una cadena.

Ejemplo (Grafo no conexo)

Este grafo no es conexo: por ejemplo, no es posible ir desde 1 hasta 7.



Conexión para grafos no orientados

Si un grafo no orientado no es conexo, podemos definir las componentes conexas: $C \subseteq V$ es una *componente conexa* del grafo si:

- 1 es posible unir todo par de vértices en C usando una cadena;
- 2 Si añadido un vértice más a C , la propiedad 1 ya no se cumpliría.

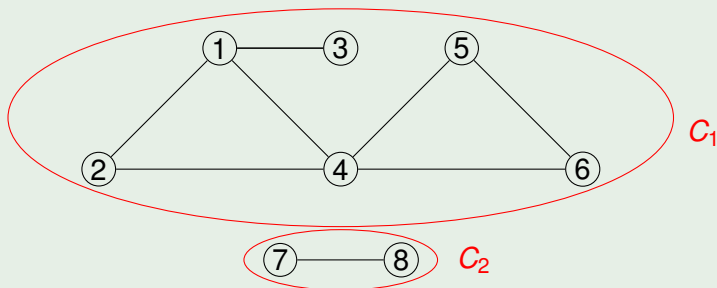
Conexión para grafos no orientados

Si un grafo no orientado no es conexo, podemos definir las componentes conexas: $C \subseteq V$ es una *componente conexa* del grafo si:

- 1 es posible unir todo par de vértices en C usando una cadena;
- 2 Si añadido un vértice más a C , la propiedad 1 ya no se cumpliría.

Ejemplo

Este grafo no es conexo: por ejemplo, no es posible ir desde 1 hasta 7.



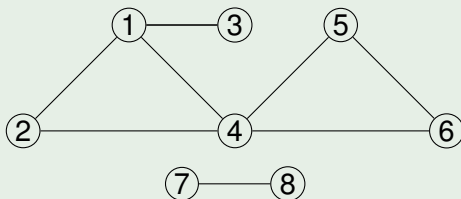
Algoritmo: conexión en grafos no orientados

$A(G)$ es la matriz de adyacencia del grafo no orientado G .

- 1 Hacer $C = A(G)$ y $k = 1$.
- 2 Si C tiene una fila con todos sus elementos no nulos, el grafo es conexo. En otro caso, ir al paso 3.
- 3 Hacer $k = k + 1$.
 - 1 Si $k < n$, hacer $C = C + A(G)^k$ y volver al paso 2.
 - 2 Si $k = n$, el grafo no es conexo.

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

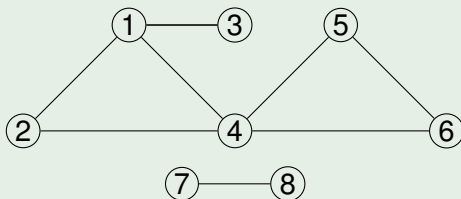
Ejemplo



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

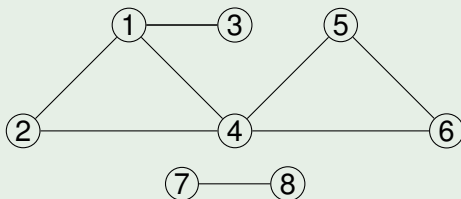
Ejemplo



$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

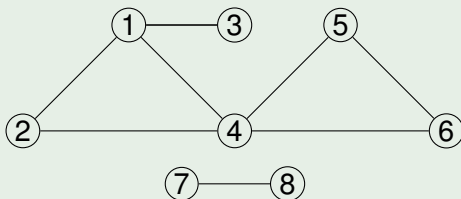
Ejemplo



$$A(G)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

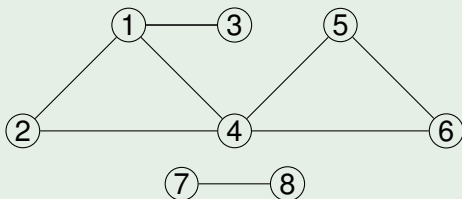
Ejemplo



$$A(G)^4 = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 2 & 10 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 4 & 10 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 6 & 21 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

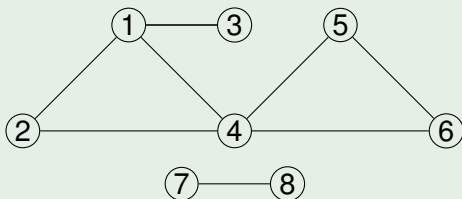
Ejemplo



$$A(G)^5 = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 13 & 37 & 18 & 18 & 0 & 0 \\ 23 & 18 & 8 & 31 & 17 & 17 & 0 & 0 \\ 13 & 8 & 2 & 10 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 37 & 31 & 10 & 38 & 30 & 30 & 0 & 0 \\ 18 & 17 & 8 & 30 & 16 & 17 & 0 & 0 \\ 18 & 17 & 8 & 30 & 17 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

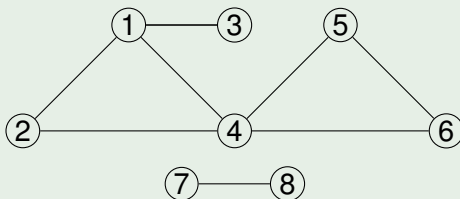
Ejemplo



$$A(G)^6 = \begin{pmatrix} 73 & 57 & 20 & 79 & 55 & 55 & 0 & 0 \\ 57 & 54 & 23 & 75 & 48 & 48 & 0 & 0 \\ 20 & 23 & 13 & 37 & 18 & 18 & 0 & 0 \\ 79 & 75 & 37 & 128 & 68 & 68 & 0 & 0 \\ 55 & 48 & 18 & 68 & 47 & 46 & 0 & 0 \\ 55 & 48 & 18 & 68 & 46 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo: conexión en grafos no orientados. Ejemplo

Ejemplo



$$A(G)^7 = \begin{pmatrix} 156 & 152 & 73 & 240 & 134 & 134 & 0 & 0 \\ 152 & 132 & 57 & 207 & 123 & 123 & 0 & 0 \\ 73 & 57 & 20 & 79 & 55 & 55 & 0 & 0 \\ 240 & 207 & 79 & 290 & 196 & 196 & 0 & 0 \\ 134 & 123 & 55 & 196 & 114 & 115 & 0 & 0 \\ 134 & 123 & 55 & 196 & 115 & 114 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conexión en grafos orientados

En grafos orientados distinguimos dos tipos de conexión:

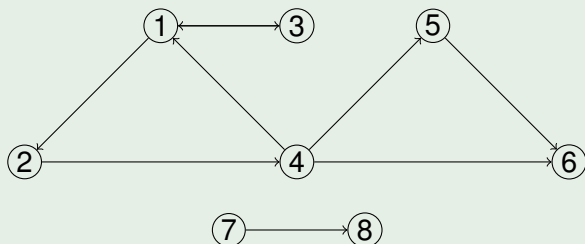
- **Conexión débil:** un grafo orientado es débilmente conexo si su grafo no orientado asociado es conexo.
- **Conexión (fuerte):** un grafo orientado es fuertemente conexo (o conexo) si para todo par de vértices i, j existe un camino de i a j y un camino de j a i .

Conexión en grafos orientados

En grafos orientados distinguimos dos tipos de conexión:

- **Conexión débil:** un grafo orientado es débilmente conexo si su grafo no orientado asociado es conexo.
- **Conexión (fuerte):** un grafo orientado es fuertemente conexo (o conexo) si para todo par de vértices i, j existe un camino de i a j y un camino de j a i .

Ejemplo (Grafo orientado no conexo)



Algoritmo: conexión en grafos orientados

$A(G)$ es la matriz de adyacencia del grafo orientado G .

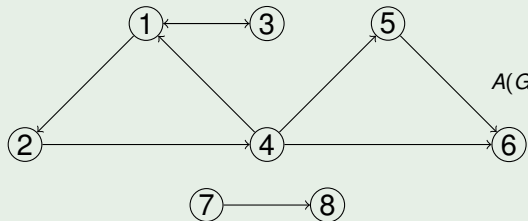
- 1 Comienzo con un vértice i , y hacer $Ds(i) = \{i\}$, $As(i) = \{i\}$.
- 2 Sea $k \in Ds(i)$:
 - 1 Añadir a $Ds(i)$ todos los vértices j de manera que $a_{kj} = 1$ en $A(G)$.
 - 2 Iterar para todos los vértices de $Ds(i)$.

Sea $k \in As(i)$:

- 1 Añadir a $As(i)$ todos los vértices j de manera que $a_{kj} = 1$ en $A(G)$.
 - 2 Iterar para todos los vértices de $As(i)$.
- 3 La componente (fuertemente) conexa en la que está el vértice i viene dada por $Ds(i) \cap As(i)$.
- 4 Eliminar de $A(G)$ las filas y columnas que se corresponden a los vértices de la componente conexa. Volver al paso 1.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

Ejemplo (Paso 1)

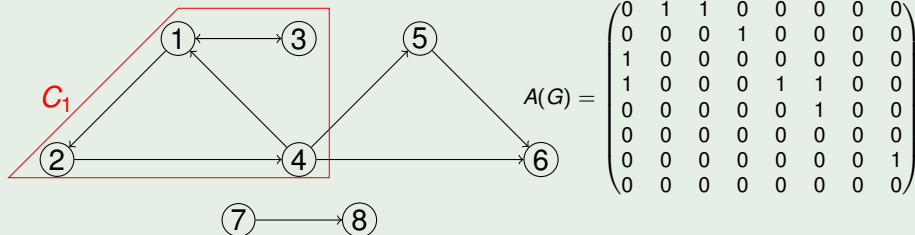


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Paso 1:** tomo el vértice 1. $Ds(1) = \{1\}$, $As(1) = \{1\}$.
- Iterando el paso dos, obtengo $Ds(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $As(1) = \{1, 2, 3, 4\}$.
- La componente conexas viene dada por $Ds(1) \cap As(1) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

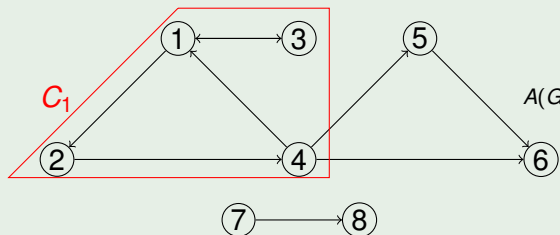
Ejemplo (Paso 1)



- **Paso 1:** tomo el vértice 1. $Ds(1) = \{1\}$, $As(1) = \{1\}$.
- Iterando el paso dos, obtengo $Ds(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $As(1) = \{1, 2, 3, 4\}$.
- La componente conexas viene dada por $Ds(1) \cap As(1) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

Ejemplo (Paso 2)

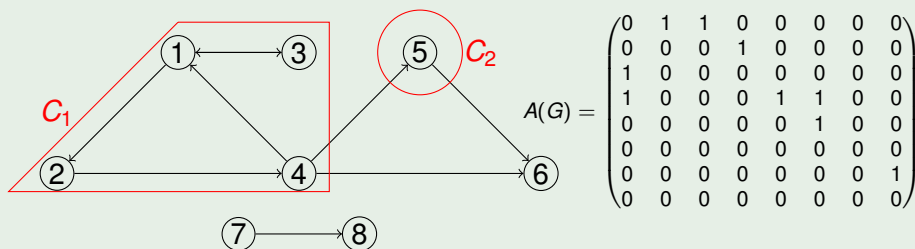


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Paso 2:** tomo el vértice 5. $Ds(5) = \{5\}$, $As(1) = \{5\}$.
- Iterando el paso dos, obtengo $Ds(5) = \{5, 6\}$, $As(5) = \{5\}$.
- La componente conexa viene dada por $Ds(5) \cap As(5) = \{5\}$.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

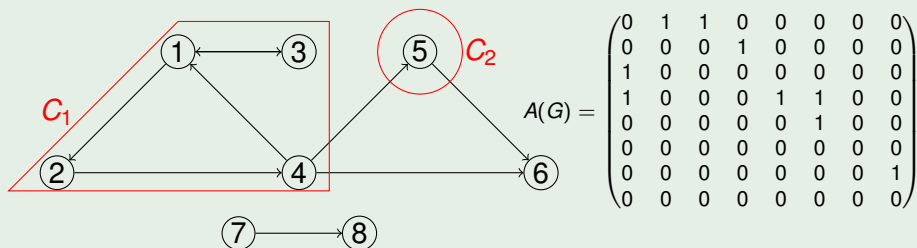
Ejemplo (Paso 2)



- **Paso 2:** tomo el vértice 5. $Ds(5) = \{5\}$, $As(1) = \{5\}$.
- Iterando el paso dos, obtengo $Ds(5) = \{5, 6\}$, $As(5) = \{5\}$.
- La componente conexa viene dada por $Ds(5) \cap As(5) = \{5\}$.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

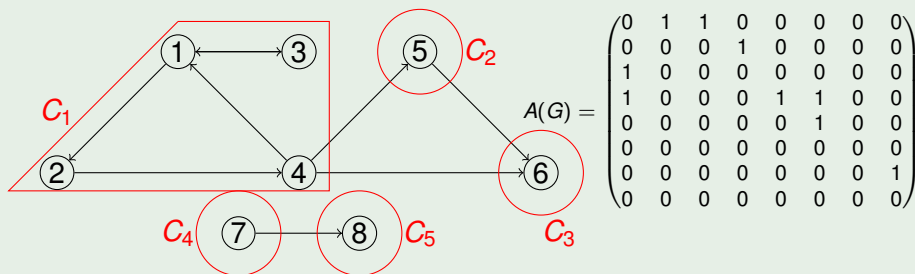
Ejemplo (Paso 3,4,5)



- Iterando el procedimiento, obtenemos las componentes conexas $\{6\}$, $\{7\}$ y $\{8\}$.

Algoritmo: conexión en grafos orientados. Ejemplo

Ejemplo (Paso 3,4,5)



- Iterando el procedimiento, obtenemos las componentes conexas $\{6\}$, $\{7\}$ y $\{8\}$.

- Una red orientada $R = (V, A, p)$ está formada por un grafo orientado $G = (V, A)$ y un vector p que a cada arco e le asigna un peso p_e .
- Una red no orientada $R = (V, A, p)$ está formada por un grafo no orientado $G = (V, A)$ y un vector p que a cada arista e le asigna un peso p_e .

En ambos casos, los pesos indican un valor que puede ser una longitud, un tiempo, ...

- Una red orientada $R = (V, A, p)$ está formada por un grafo orientado $G = (V, A)$ y un vector p que a cada arco e le asigna un peso p_e .
- Una red no orientada $R = (V, A, p)$ está formada por un grafo no orientado $G = (V, A)$ y un vector p que a cada arista e le asigna un peso p_e .

En ambos casos, los pesos indican un valor que puede ser una longitud, un tiempo, ...

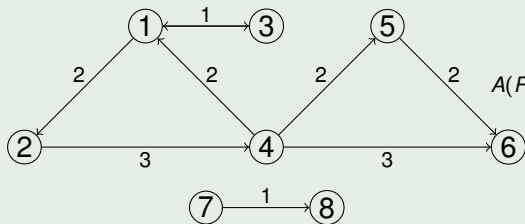
- Una red no orientada $R = (V, A, p)$ es *conexa* si $G = (V, A)$ es un grafo no orientado conexo.
- Una red orientada $R = (V, A, p)$ es *(débilmente) conexa* si $G = (V, A)$ es un grafo orientado (débilmente) conexo.

Matriz de adyacencia con pesos

La **matriz de adyacencia con pesos** de una red $R = (V, A, p)$, denotada por $A(R)$, es una matriz $n \times n$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} p_e, & \text{si } e = (i, j) \in A. \\ 0, & \text{si } e = (i, j) \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo



$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

