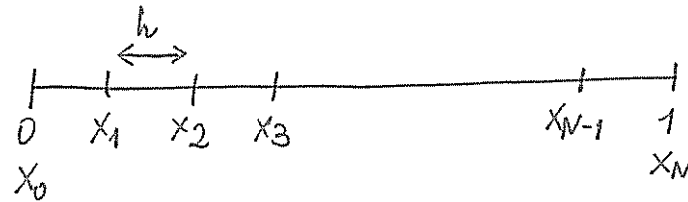


Introducción a ELEMENTOS FINITOS

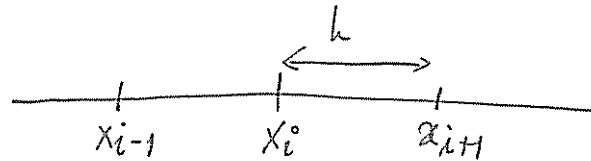
Juan Luis Martínez Fernández

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Problema de Poisson 1D}$$

① Partición del intervalo $[0,1]$ en N subintervalos: $x_{i+1} - x_i = h$



② Discretización del operador $u''(x)$



$$u''(x_i) \simeq \frac{u'(x_{i+1}) - u'(x_i)}{h} \quad \text{esquema progresivo.}$$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} \quad \text{esquema regresivo.}$$

$$u'(x_{i+1}) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \quad \text{esquema regresivo}$$

$$\Rightarrow u''(x_i) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$\text{Error} \sim O(h^2).$$

Método de elementos Finitos

$$-u''(x) = f(x)$$

$$\longrightarrow - \int_0^1 u''(x) \cdot w(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx \quad (*)$$

Sea $w(x)$ una función que denominaremos de test y que veremos que debe cumplir

1ª condición $w(x)$ tiene que hacer que ambas integrales existan y sean finitas.
Ej. $w(x)$ continua

Si $w(x)$ es además derivable y permite partes, entonces:

$$\int_0^1 u'(x) w'(x) dx - (u'(1) w(1) - u'(0) w(0)) = \int_0^1 f(x) w(x) dx \quad (**)$$

(*) Los físicos llaman a esta formulación $\longrightarrow$ Principio de los trabajos virtuales.

Los Matemáticos la llaman $\longrightarrow$ Formulación débil (**) o variacional

Si además imponemos $w(0) = w(1) = 0 \Rightarrow$

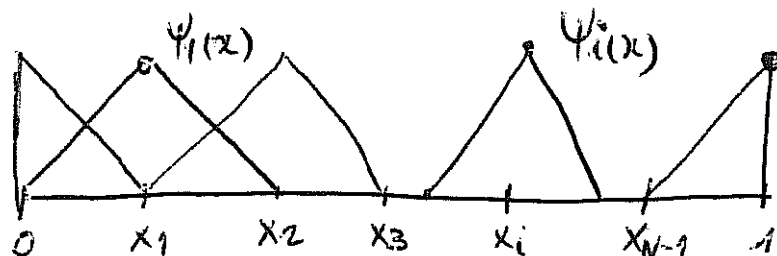
$\boxed{FB}$

$$\int_0^1 u'(x) w'(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx \quad \forall w(x) : w(0) = w(1) = 0$$

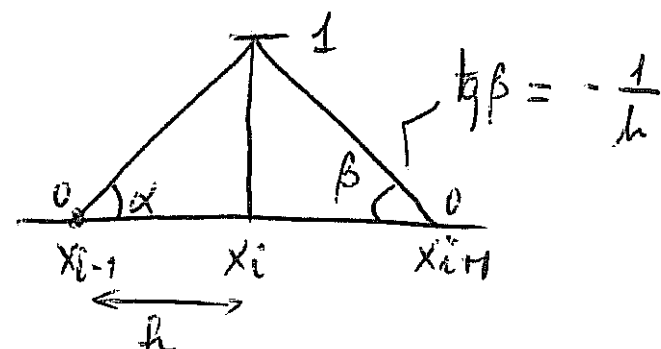
(1) Toda solución fuerte es débil

y se puede demostrar que toda solución débil es fuerte si posee la regularidad adecuada.

⇒ funciones de base triangulares



$$\text{Ecuación de } \psi_i^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} (x - x_{i-1}) & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} (x - x_{i+1}) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x_{i-1} &\leq x \leq x_i \\ x_i &\leq x \leq x_{i+1} \\ \text{resto} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{h} \\ \text{tg } \beta &= -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$y - 0 = m(x - x_{i-1})$$

$$y = \frac{1}{h} (x - x_{i-1})$$

Tenemos que resolver

$$\int_0^1 u'(x) w'(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx$$

donde $w(x)$ son las funciones test.

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j(x).$$

$w(x) \Rightarrow$ las elegimos como $\psi_j(x)$

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N u_j \psi_j'(x) \right) w'(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx.$$

$\Downarrow$

hacemos que esta ecuación se verifique
para las N funciones de base $\psi_j(x)$.

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N u_j \psi_j'(x) \right) \psi_k'(x) dx = \int_0^1 f(x) \psi_k(x) dx \quad k=1, N.$$

$$\sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\int_0^1 \psi_j'(x) \psi_k'(x) dx}_{\text{matriz de rigidez}} = \int_0^1 f(x) \psi_k(x) dx \Rightarrow \text{SISTEMA LINEAL}$$

estos productos no son todos $\neq 0$ al tener soporte compacto
las funciones $\psi_k(x)$.