

De la ESTADÍSTICA a la GEOESTADÍSTICA

1. Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos

Variable aleatoria $\longrightarrow$ función cuyos valores deben de ser interpretados en términos de probabilidad

$$P(X \leq c) \quad P(X=c)?$$

Modelos Matemáticos

- o Deterministas
- o Probabilistas
- o Mixtos

$$F(t) = m \cdot a(t).$$

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(t) \\ x'(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la potencia de una capa de carbón en un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sea superior a un cierto valor?

Idem ley Mineral de un determinado yacimiento,

la concentración de un determinado elemento en un suelo, grano
etc...

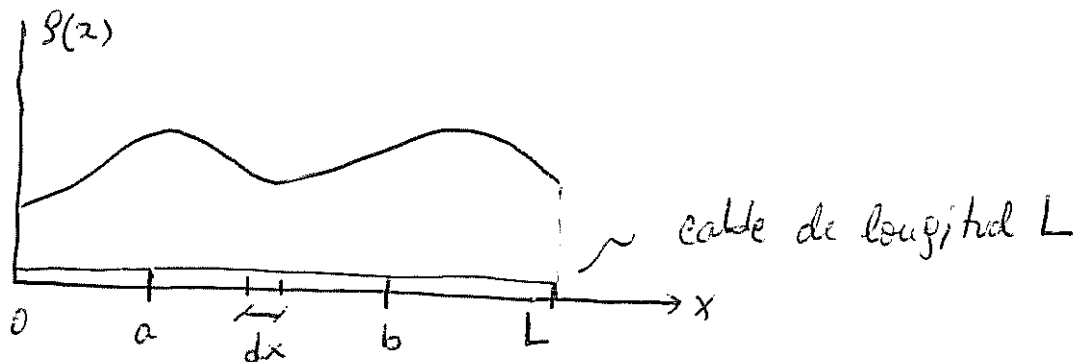
Los Modelos Probabilistas se utilizan cuando se desconoce la ley física de comportamiento.

Los modelos mixtos son modelos deterministas con parámetros aleatorios (Ejemplo - Ecuaciones diferenciales estocásticas).

Diapo 2

Vamos a trabajar con v.s. continuas (que toman sus valores en $\mathbb{R}$) ②

Cable con densidad
variable de longitud
 L



$$\text{Masa} = \int_0^L f(x) dx$$

Las variables aleatorias poseen una
masa total de probabilidad $M = 1$

①

$f(x) \longrightarrow \underline{f(x)}$ función de densidad de probabilidad

Masa en $[a, b]$

$$M_{[a,b]} = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \underline{f(x)} dx$$

↑
Masa de probabilidad $x(\omega) \in [a, b]$

↑
v.a.

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1}$$

②

Función acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \underline{f(t)} dt$$

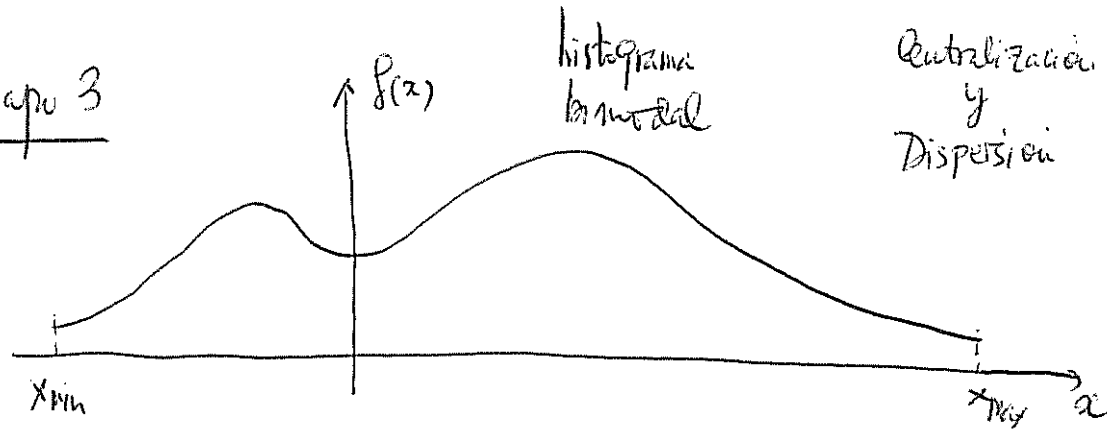
Función cdf
acumulada de probabilidad

$$\boxed{F'(x) = \underline{f(x)}}$$



↑ histograma
Tª fundamental del cálculo integral

Drapo 3



Punto de gravedad de un cable con densidad $f(x)$.

$$M \cdot \bar{x} = \int_0^L x f(x) dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^L x f(x) dx$$

↓ v.a

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

MEDIA

DISPERSION

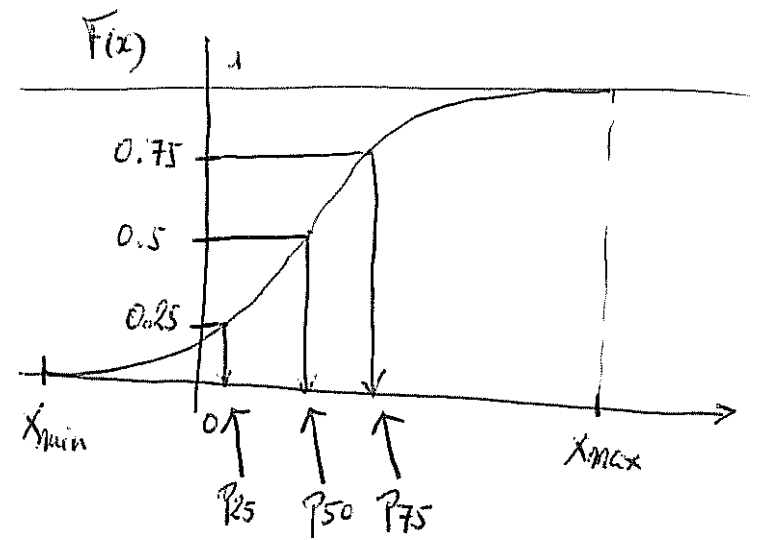
Hallar α : $\min g(\alpha)$

función dispersión $g(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha)^2 f(x) dx \longrightarrow g'(\alpha) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha) f(x) dx = 0 \longrightarrow$

$\alpha = \mu$

Media

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \frac{g(\alpha)}{1} \Rightarrow \text{Desviación típica.}$$



P_{50} : Mediana

P_{25} : Cuartil inferior

P_{75} : Cuartil superior

$P_{75} - P_{25}$: Rango intercuartil

$$P(X \leq m_p) = p$$

↑
percentil p.

Drapo 4

Media

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Desv. típica

$$\sigma \Rightarrow \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

↓
Varianza

$$\text{Mediana} = P_{50}$$

$$\text{IQR} = P_{75} - P_{25}$$

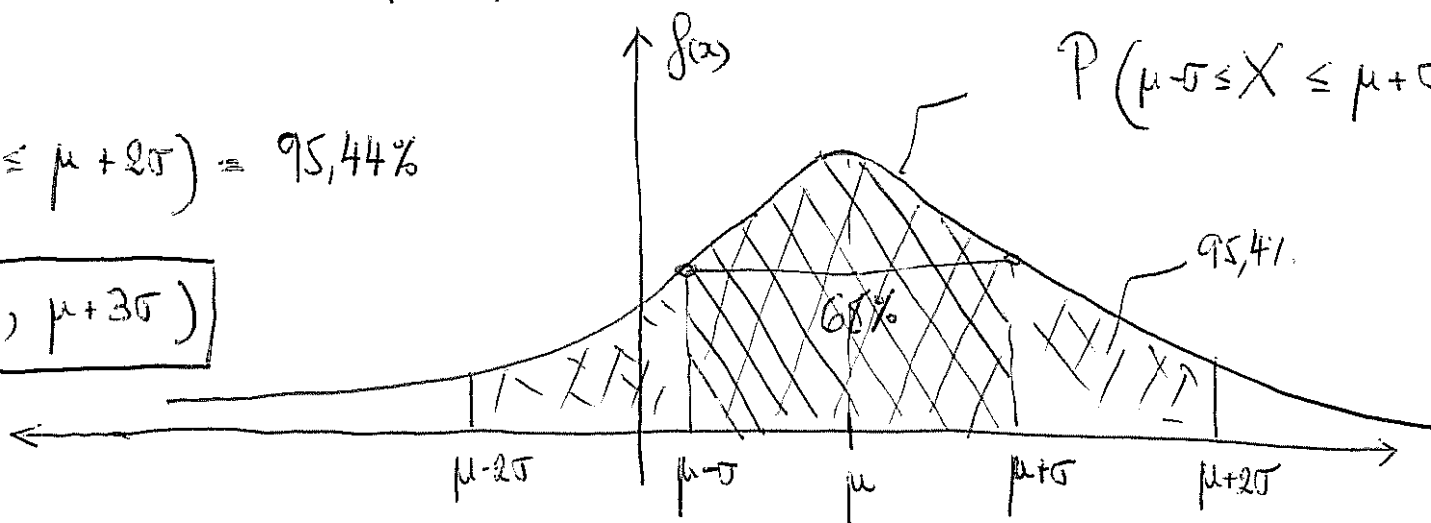
Distribucion Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,44\%$$

$$99,74\% \text{ en } (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$$



$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,2\%$$

$$\sigma^2 = E(x - \mu)^2 = E(x^2) - \mu^2$$
$$\mu = E(x)$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

↑
esperanza

Diapos 5

Otras distribuciones



Uniforme
Lognormal
Exponencial
:
etc..

$$Y \sim \lg(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \lg Y \sim N(\mu, \sigma)$$

Tª Central del límite $\Rightarrow Y = \sum_{k=1}^n Y_k$, Y_k independientes $\Rightarrow Y \sim N(\alpha, \beta)$

Vectores Aleatorios

① Bidimensionales

(X, Y)

X, Y variables aleatorias



f_x f_y funciones de densidad respectivas

$f(x, y) \rightarrow$ función de densidad conjunta

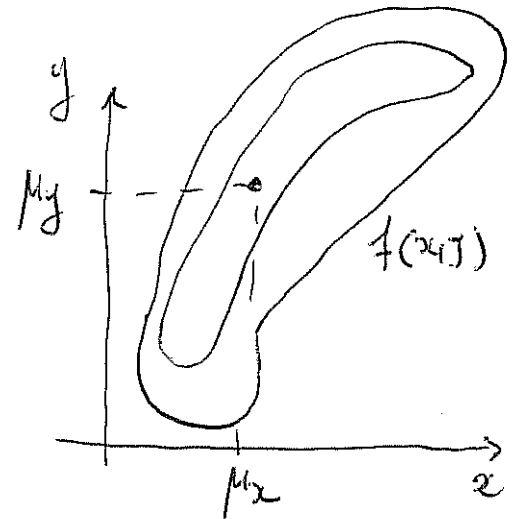
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Centro de gravedad

(μ_x, μ_y)

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x dx$$

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_y dy$$



MARGINALES

$$\begin{cases} f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{cases}$$

$\sigma_x, \sigma_y \rightarrow$ son las desviaciones típicas de las distribuciones univariantes.

Diapo 6 Covarianza, Correlación y Regresión

DATOS

$(x_1, y_1) (x_2, y_2) , \dots , (x_m, y_m)$

línea de regresión o de mínimos cuadrados
(Recta)

$$y^* = ax + b \quad A \quad \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{matrix} y_1 = mx_1 + b \\ \vdots \\ y_m = mx_m + b \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ecuaciones normales

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

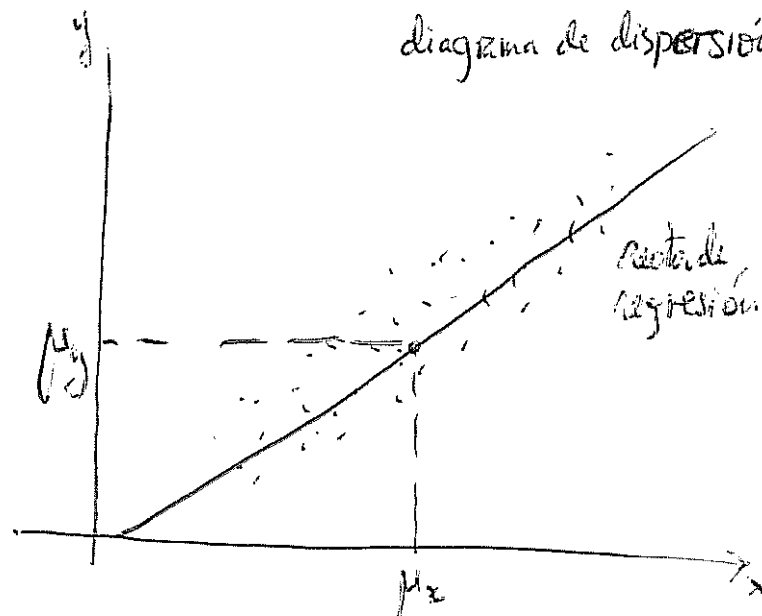
$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix} \Rightarrow y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

σ_x^2 : Varianza de X

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x^2}$$

diagrama de dispersión



pendiente de la
recta de regresión

① Covarianza no centrada

$$\sigma_{xy} = E(X \cdot Y)$$

La covarianza es una medida del parecido entre las variables X e Y

② Covarianza centrada

$$C_{xy} = E(X - \mu_x)(Y - \mu_y) =$$

$$\begin{aligned} &= E(X \cdot Y) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + \mu_x \mu_y = \\ &= E(X \cdot Y) - \mu_x \cdot \mu_y = \sigma_{xy} - \mu_x \cdot \mu_y \end{aligned}$$

③ Coeficiente de correlación lineal

$$\rho_{xy} = E\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y - \mu_y}{\sigma_y}\right) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y} E(X - \mu_x)(Y - \mu_y) = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

$$C_{xy} = 0 \Rightarrow \rho_{xy} = 0$$

Si $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

independencia



incorrelación

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X \cdot Y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy = \int x f_x(x) dx \int y f_y(y) dy \\ &= \mu_x \mu_y \Leftrightarrow C_{xy} = 0 \Leftrightarrow \rho_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Diapo 8

Vectores aleatorios n -dimensionales

$\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son variables aleatorias, cada una con su función de densidad de probabilidad.

Si $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son variables aleatorias correspondientes a un mismo proceso aleatorio en puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (espacio o tiempo)

Variables Regionalizadas $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$
Series temporales $\vec{x}_i = t_i$ (tiempo)

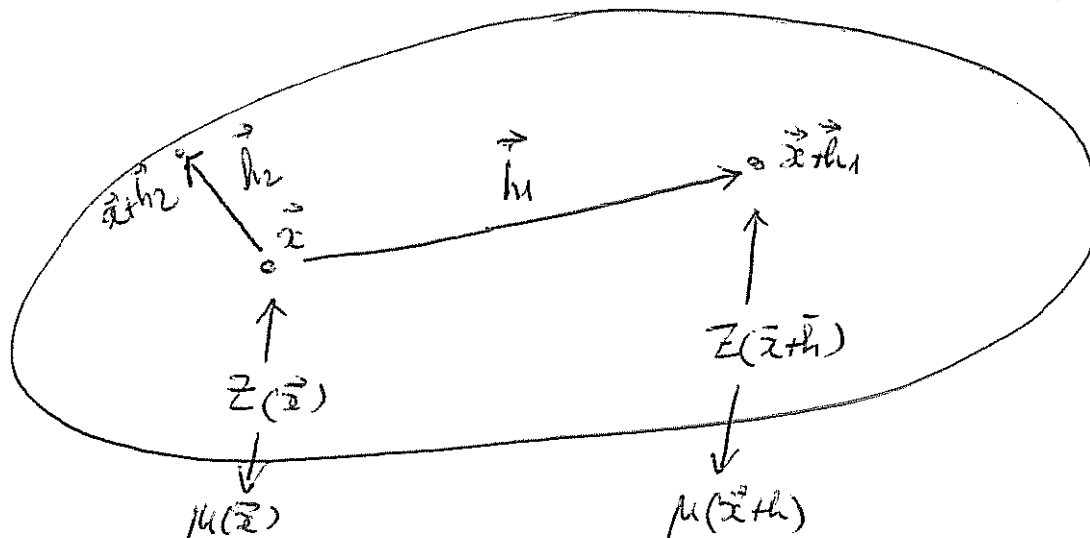
Definición Función aleatoria

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Z} X$ (espacio de variables aleatorias)

$\vec{x} \mapsto Z(\vec{x})$ o a su punto $\vec{x}$

Una variable Regionalizada $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ es una función aleatoria discreta, es decir, la realización de Z en $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.

• La similitud es función de la distancia y de la dirección.



$$C_{\vec{x}, \vec{x} + \vec{h}} = E(Z(\vec{x}) \cdot Z(\vec{x} + \vec{h})) - \mu(\vec{x}) \cdot \mu(\vec{x} + \vec{h})$$

Función Covarianza



depende de $\vec{x}$ y de $\vec{h}$

El parecido depende de $\vec{x}$ y de $\vec{h}$

Diapos 9

$$\gamma_{\vec{x}, \vec{x}+h} = E \left(Z(\vec{x}) - Z(\vec{x}+h) \right)^2 = E \left(Z(\vec{x}) - \mu(\vec{x}) + \mu(\vec{x}) - Z(\vec{x}+h) - \mu(\vec{x}+h) + \mu(\vec{x}+h) \right)^2$$

$\uparrow$
 función variograma

$$E \left(Z^2(\vec{x}) \right) + E \left(Z^2(\vec{x}+h) \right) - 2 E \left(Z(\vec{x}) \cdot Z(\vec{x}+h) \right) + 2\mu(\vec{x}) - \mu(\vec{x}+h) - 2\mu(\vec{x}) \cdot \mu(\vec{x}+h) =$$

$$= E \left(Z^2(\vec{x}) \right) - \mu^2(\vec{x}) + E \left(Z^2(\vec{x}+h) \right) - \mu^2(\vec{x}+h) - 2 \left(E \left(Z(\vec{x}) \cdot Z(\vec{x}+h) \right) - \mu(\vec{x}) \cdot \mu(\vec{x}+h) \right) +$$

$$+ \mu^2(\vec{x}) + \mu^2(\vec{x}+h) - 2\mu(\vec{x}) \cdot \mu(\vec{x}+h) =$$

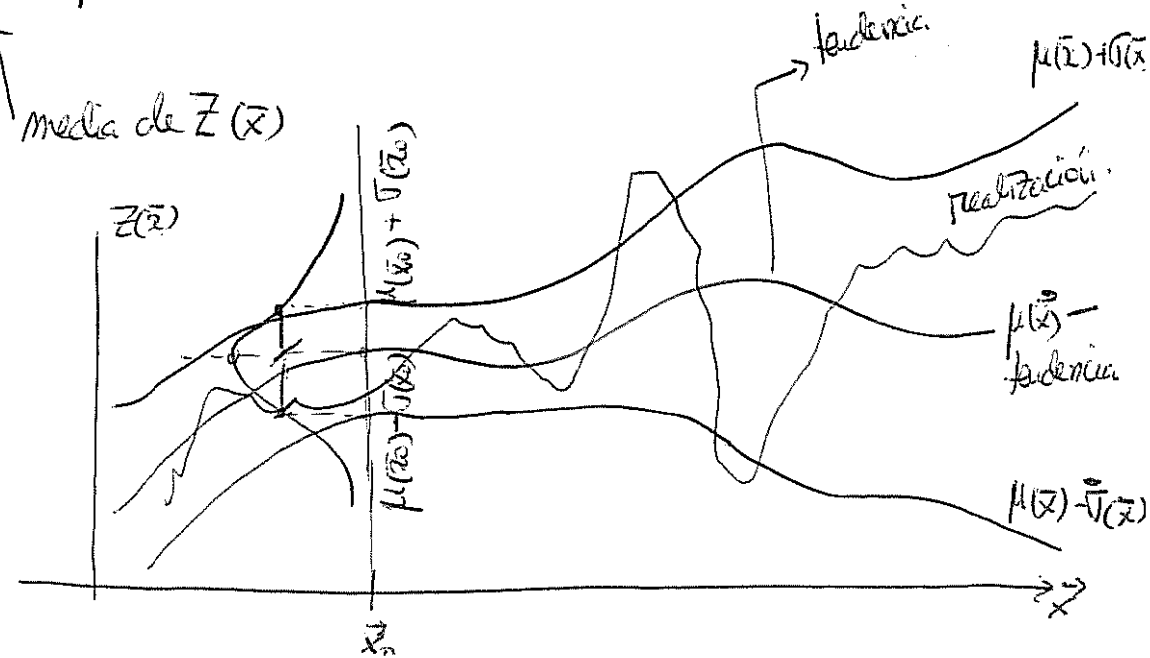
$$= \sigma_{(\vec{x})}^2 + \sigma_{(\vec{x}+h)}^2 - 2C_{\vec{x}, \vec{x}+h} + (\mu(\vec{x}) - \mu(\vec{x}+h))^2$$

$\uparrow$
Varianza
de $Z(\vec{x})$

$\uparrow$
Varianza
de $Z(\vec{x}+h)$

$\uparrow$
Covarianza entre
 $Z(\vec{x})$ y $Z(\vec{x}+h)$

$\uparrow$
media de $Z(\vec{x})$



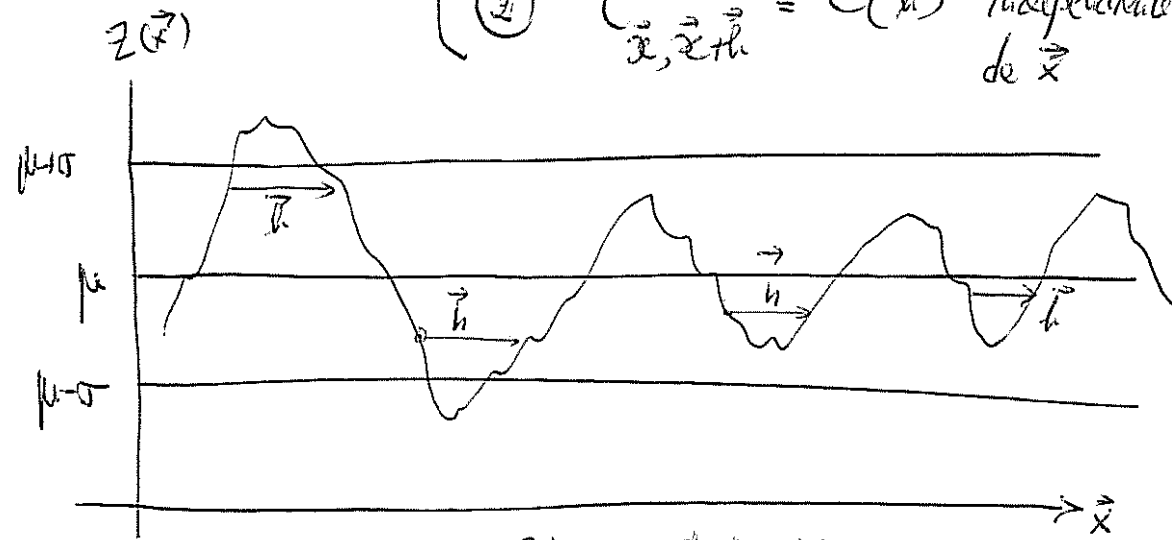
Diapo 10 Hipótesis Estacionaria $\rightarrow$ 2 condiciones

$$\begin{cases} (1)^\circ & \mu(\vec{x}) = \mu \in \mathbb{R} \text{ independiente de } \vec{x} \\ (2)^\circ & C_{\vec{x}, \vec{x}+\vec{h}} = C(\vec{h}) \text{ independiente de } \vec{x} \end{cases}$$

$$C(\vec{0}) = C_{\vec{x}, \vec{x}} = \text{Var}(Z(\vec{x})) = \sigma^2$$

$\uparrow$
independiente de $\vec{x}$
también

$$\gamma(\vec{h})_{\vec{x}, \vec{x}+\vec{h}} = \sigma^2 - 2C(\vec{h}) + \cancel{(\mu - \mu)^2}$$

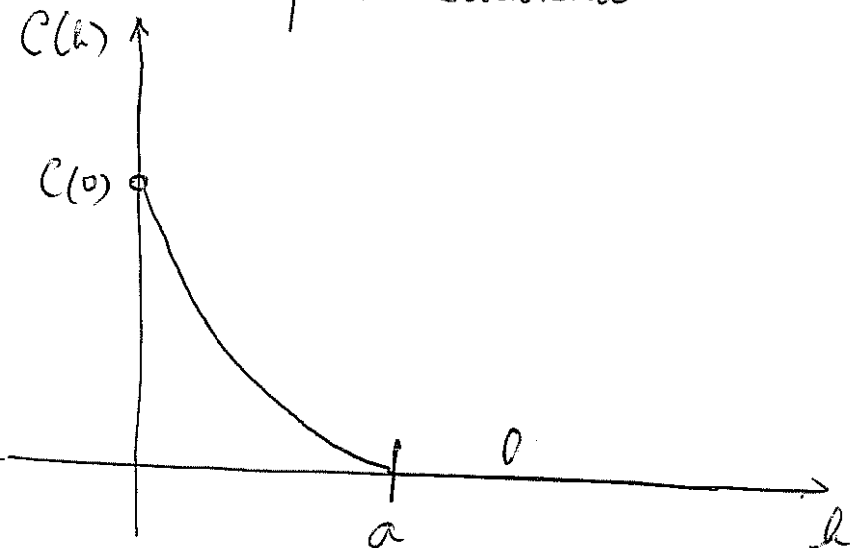


$$\frac{1}{2} \gamma(\vec{h}) = \sigma^2 - C(\vec{h})$$

$\uparrow$
Semitariograma

$$\rho(\vec{h}) = \left\{ \text{Correlograma} \right\} = \frac{C(\vec{h})}{C(\vec{0})} \quad]$$

$$C(h) = 0 \quad \forall |h| > a$$



$\uparrow$
Alcance

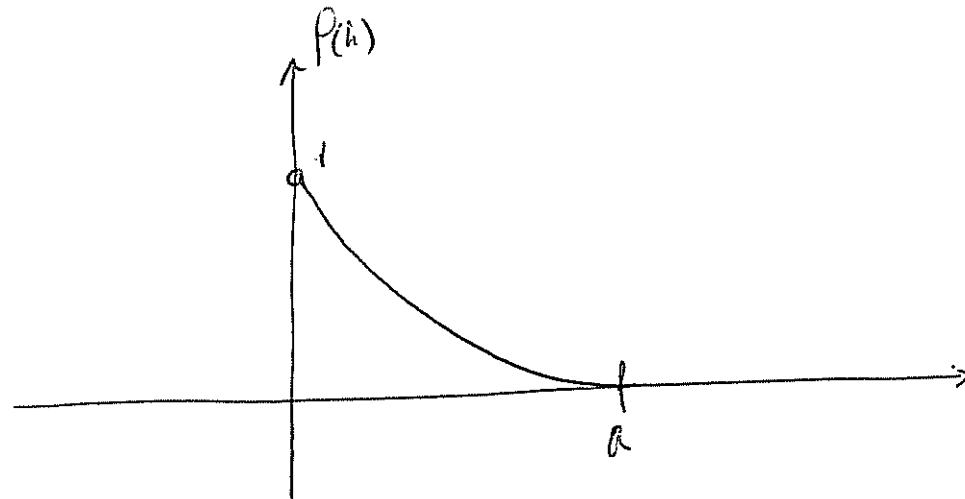
Diapo 11 Proceso Estacionario de 2º orden

El parecido sólo depende de la distancia,
no de $\vec{x}$

Si el parecido ($C(\vec{h})$) no depende de la dirección

$\Rightarrow$ Proceso isótropo. $\Rightarrow C = C(|\vec{h}|)$

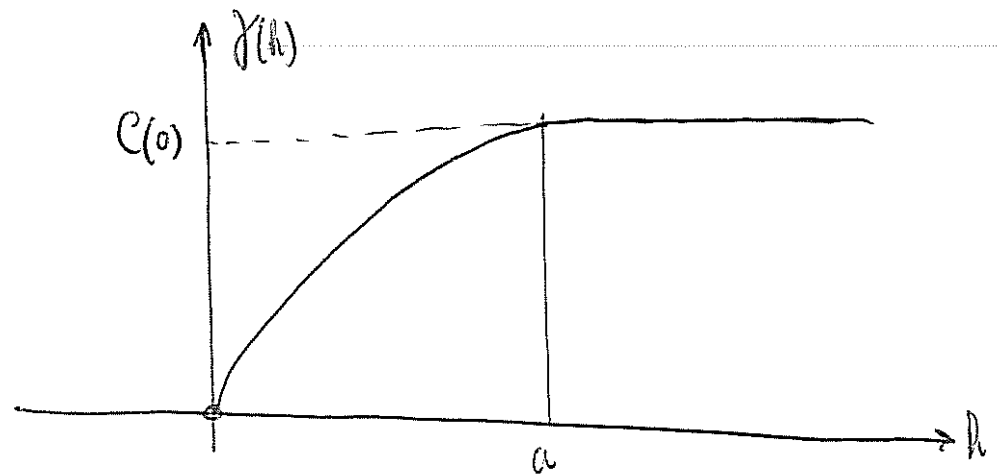
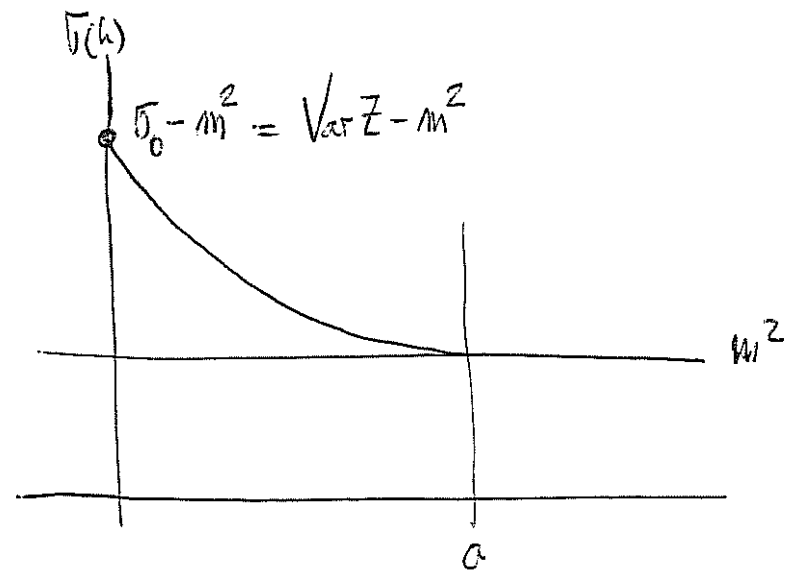
Si el parecido depende de la dirección $\rightarrow$ anisótropo



$$C(h) = \sigma_z^2 - m^2$$

$\uparrow$
Constante
no centrada

Variograma



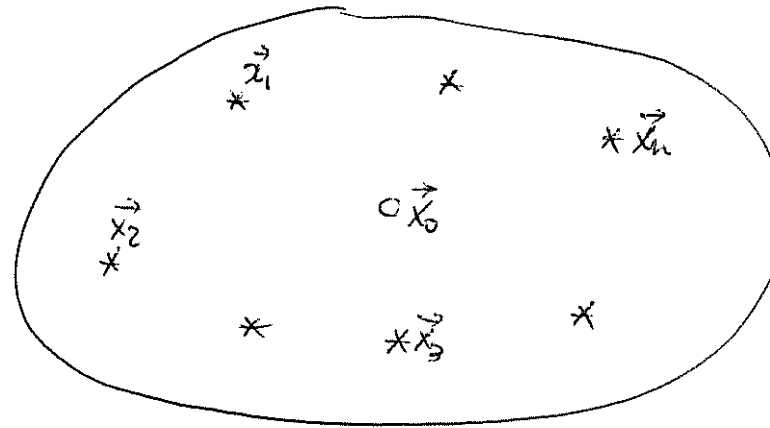
Drapo 12 La hipótesis Estacionaria y el problema de la Estimación

Dados un conjunto de datos observados $Z(\vec{x}_1), \dots, Z(\vec{x}_n)$ en puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (Por ejemplo, SONDEOS)

el problema reside en

Estimar $Z^*(\vec{x}_0)$

- Existen muchos tipos de estimadores, pero todos son geostatísticos.



variable aleatoria
que se requiere
en $\vec{x}_0$

Estimadores LINEALES

$$Z^*(\vec{x}_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(\vec{x}_{\alpha})$$

variable aleatoria
Estimador en $\vec{x}_0$

Estimadores Inesgados

$$E(Z(\vec{x}_0)) = E(Z^*(\vec{x}_0)) = E(Z(\vec{x}_{\alpha})) = \mu$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

Estimador en función del inverso
del cuadrado de la distancia

$$\lambda_{\alpha} = \frac{k}{d_{\alpha 0}^2}$$

$$d_{\alpha 0} = \|\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_0\|$$

Estimador
BLUE

$$\text{Var}(Z(\vec{x}_0) - Z^*(\vec{x}_0))$$

||

MÍNIMA
minimo error de
estimación

Diapo 13

$$\text{Var} (Z(x_0) - Z^*(x_0)) = \text{Var} \left(Z(x_0) - \sum_{k=1}^n \lambda_k Z(x_k) \right) =$$

$$= E \left(Z(x_0) - \sum_k \lambda_k Z(x_k) \right)^2 - 0$$

$$E \left(Z(x_0) - \sum_{k=1}^n \lambda_k Z(x_k) \right) = E(Z(x_0)) - \sum_{k=1}^n \lambda_k E(Z(x_k)) = \mu - \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu = \mu \left(1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) = 0$$

$$\text{Var} (Z(x_0) - Z^*(x_0)) = E \left(\sum_{k=0}^n a_k Z(x_k) \right)^2 \quad \text{con} \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_k = -\lambda_k \end{matrix} =$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j E(Z(x_i) \cdot Z(x_j))$$

El problema radica en calcular $E(Z(x_\alpha) \cdot Z(x_\beta))$

$$E(Z(x_0) \cdot Z(x_\alpha))$$

↑

desconocida.

Esto es posible si se tiene en cuenta la hipótesis estacionaria en la que el parecido depende solo de la distancia.

¿Cómo CALCULARÍAMOS ambos VALORES?

De la ESTADÍSTICA a la GEOESTADÍSTICA

2. Técnicas de Análisis Estructural

①

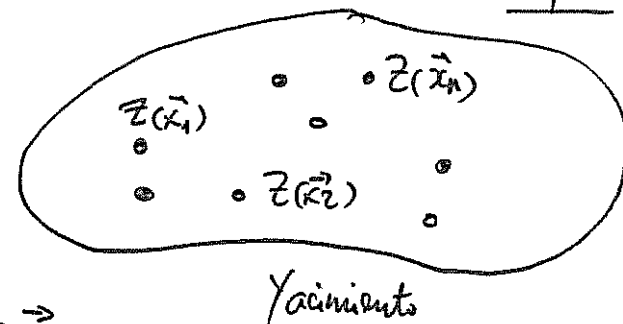
El variograma y el Análisis Estructural

Diapo 1

$$Z(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{X} \quad \begin{array}{l} \text{variable regionalizada} \\ \text{o función aleatoria} \end{array}$$

$$\vec{x} \longmapsto Z(\vec{x})$$

↑
variable aleatoria que se realiza en el punto $\vec{x}$



El fenómeno regionalizado $Z(\vec{x})$ se conoce en una red muestreo $\{\vec{x}_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N}$

- El análisis estructural trata del análisis del fenómeno regionalizado para la red de muestreo $\{\vec{x}_\alpha\}$
- El Krigado es la estimación del fenómeno en un punto $\vec{x}_0$ no muestreado $Z^*(\vec{x}_0)$

↓
ESTIMADOR BLUE (Best linear Unbiased Estimator)

- La simulación condicional consiste en obtener diferentes variables regionalizadas, condicionadas a la red de muestreo $\{x_\alpha\}_{\alpha=1, N}$

$$Z_c(x_\alpha) = Z(x_\alpha) \quad \alpha = 1, \dots, N$$

y todas con la misma estructura espacial

$$\gamma_{Z_c}(\vec{h}) = \gamma_Z(\vec{h})$$

KRIGADO $\longrightarrow$ Cálculo de Reservas

Simulación Condicional $\longrightarrow$ Planificación

② Variograma teórico y experimental

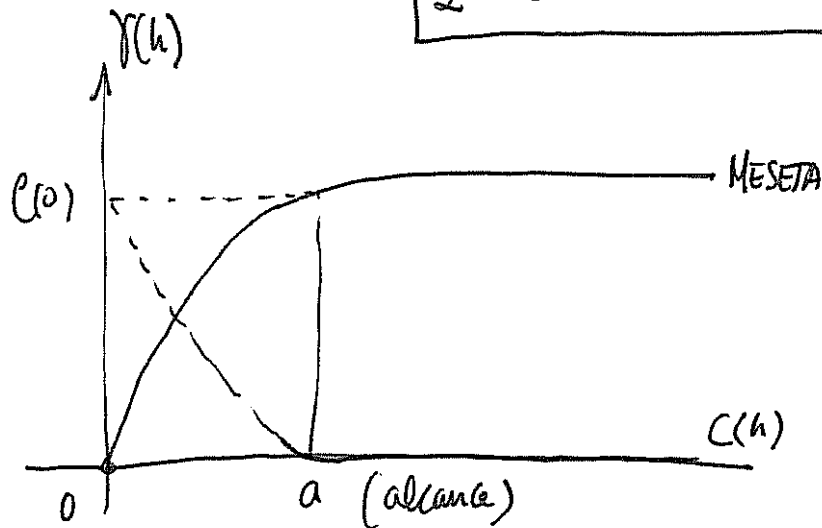
$$\gamma_{Z(\bar{x}), Z(\bar{x}+\bar{h})} \stackrel{\text{def}}{=} E (Z(\bar{x}+\bar{h}) - Z(\bar{x}))^2 = \text{Var } Z(\bar{x}+\bar{h}) + \text{Var } Z(\bar{x}) - 2C_{Z(\bar{x}), Z(\bar{x}+\bar{h})} + (\mu(\bar{x}+\bar{h}) - \mu(\bar{x}))^2$$

↓ hipótesis Estacionaria $\begin{cases} \mu = \text{cte} \\ C_{Z(\bar{x}), Z(\bar{x}+\bar{h})} = C(\bar{h}) \end{cases}$

$$\frac{1}{2} \gamma(\bar{h}) = C(0) - C(\bar{h})$$

$$C(0) = \text{Var } Z(\bar{x})$$

$$C_{Z(\bar{x}), Z(\bar{x}+\bar{h})} = 0 \quad \forall \bar{h} : |\bar{h}| \geq a$$



$$\gamma(0) = 0$$

El variograma teórico pasa por 0, pues

$$\gamma(0) = E (Z(\bar{x}) - Z(\bar{x}))^2 = 0$$

(3)

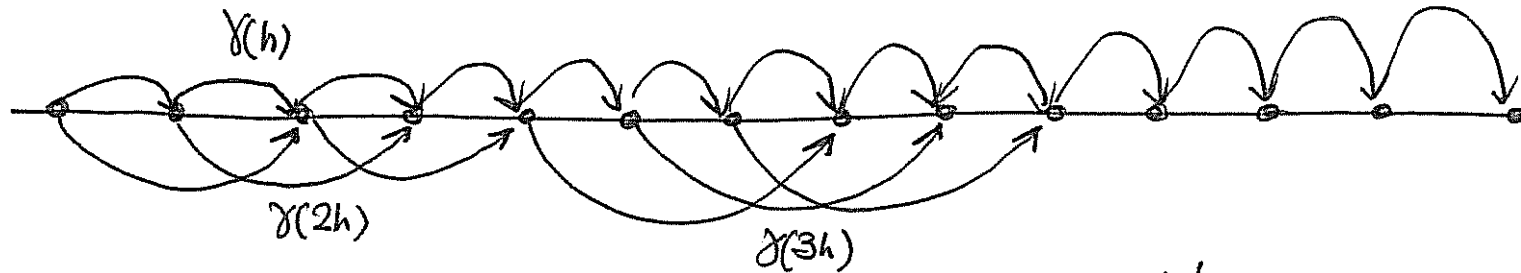
Diapo 3

Variograma experimental $\rightarrow$ Inferencia de $\gamma(h)$ a partir de la red de muestreo.

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{k=1}^{N(h)} (\bar{Z}(x_k + h) - \bar{Z}(x_k))^2$$

$N(h)$: número de parejas de valores $\bar{Z}(x)$, $\bar{Z}(x+h)$ que están a la distancia h

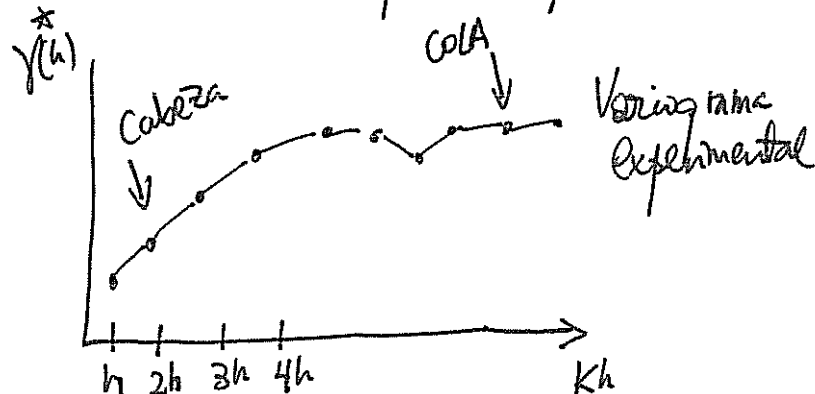
Caso de Variable 1D - Datos Equiespaciados



Se suele calcular $\gamma(kh)$ para $1 \leq k \leq N/3$ N , N' de datos.

El número de parejas $N(kh) = N - k$ disminuye linealmente con k .

Por dicha razón no se suele sobrepasar $N/3$.



④ Datos 1D irregularmente espaciados



$$Z(\bar{x}_1), Z(\bar{x}_2) \in N(h) \iff \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = |x_1 - x_2| \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$$

ε es una tolerancia que eventualmente puede depender de h , o ser constante

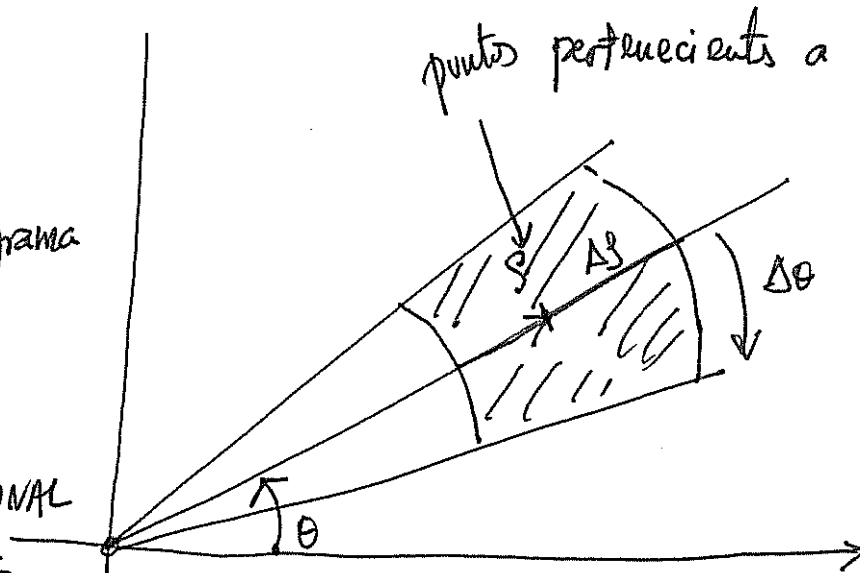
Datos 2D

Comportamiento espacial
o direccional del variograma



VARIograma OMNIDIRECCIONAL
o VARIograma PROMEDIO

$\bar{x}_0$



Dominio de captura.

Este cálculo se hace $\forall \bar{x}_0$

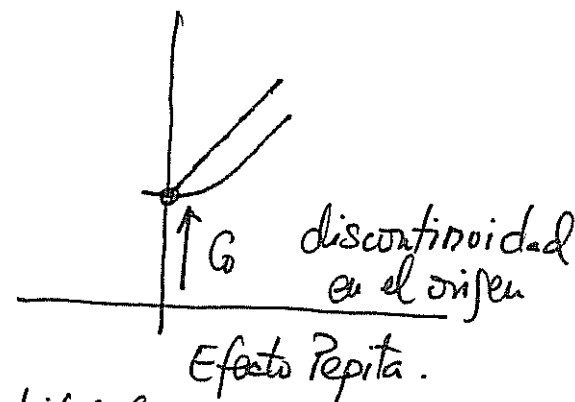
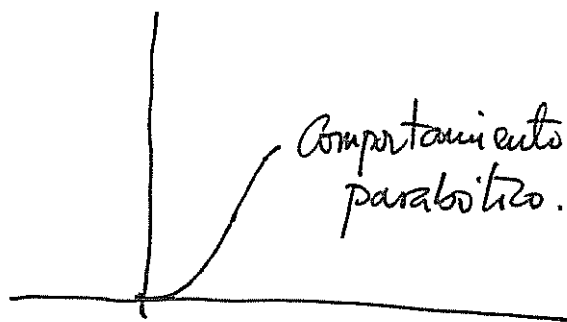
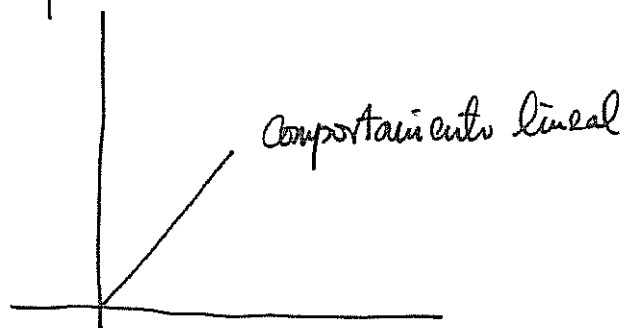
Idem para el caso 3D $\rightarrow$ Dominio de captura 3D en esferas.

Diapo ⑤

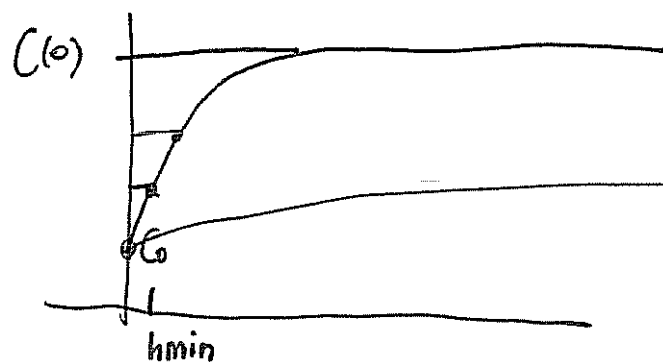
INTERPRETACIÓN DEL VARIOGRAMA

- ① Comportamiento en el origen $\rightarrow$ regularidad
- ② Comportamiento en el $\infty \rightarrow$ Efectos no estacionarios
- ③ Efecto pepita, alcance, meseta.
- ④ Isotropía, Anisotropía, Efectos Agujero.

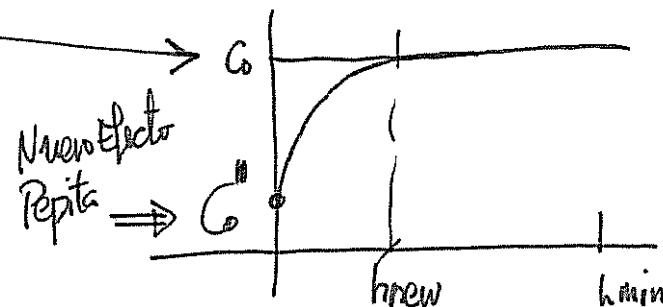
① Origen



El efecto pepita lo forman los errores en los datos y/o las microvariabilidades no observables a la escala de muestreo $\{\vec{x}_\alpha\}$



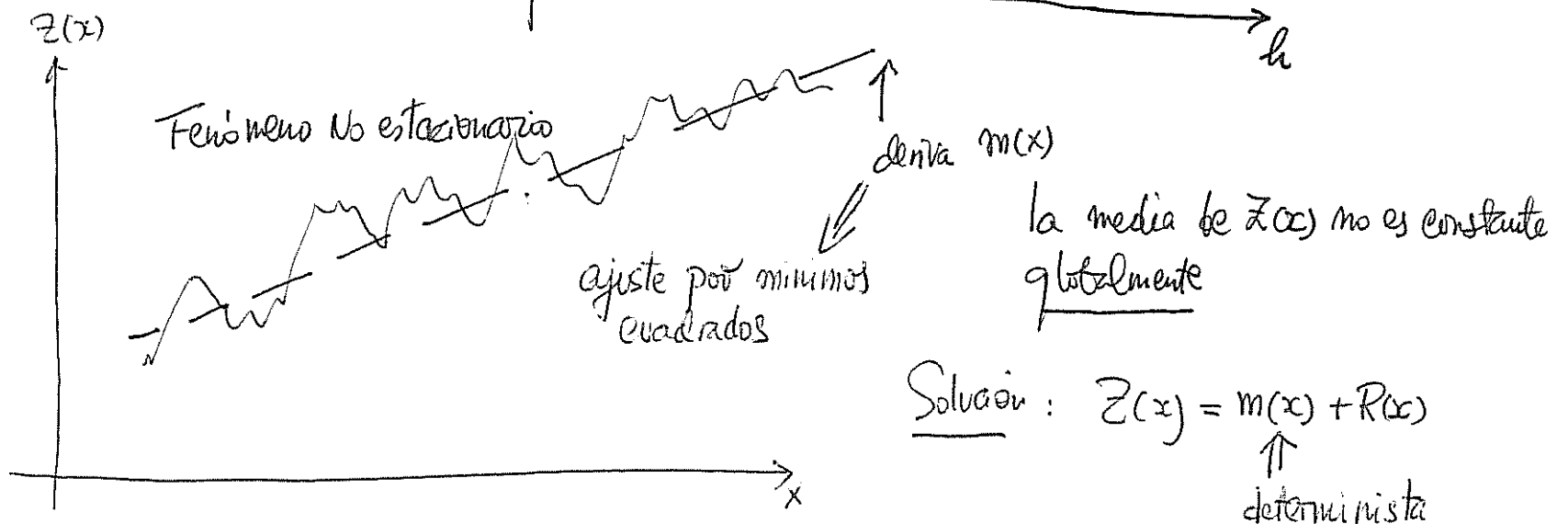
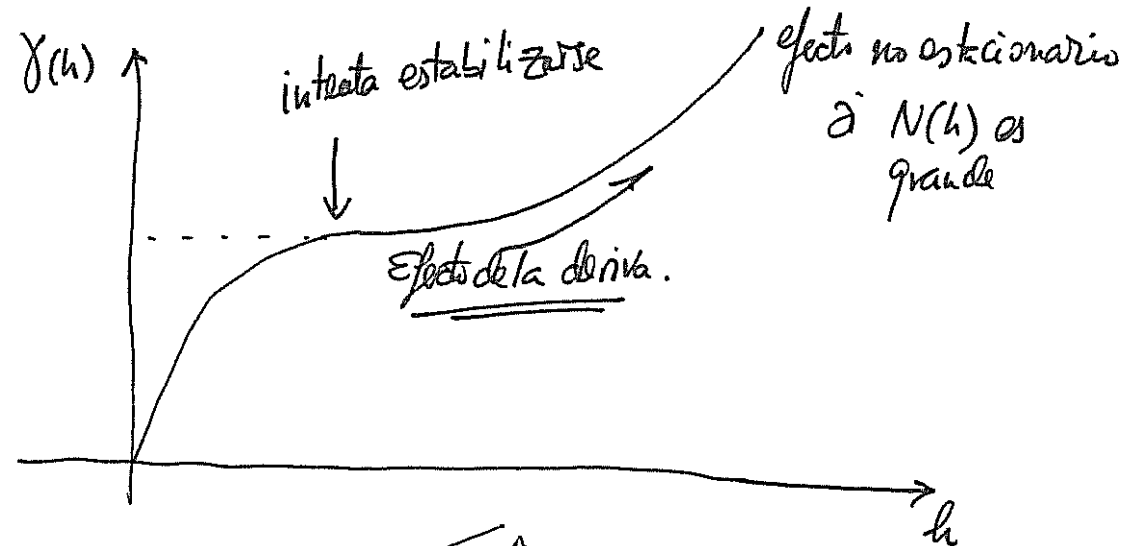
h_{min} es la mínima distancia de muestreo. Si h_{min} se remuestrea a h_{new} .



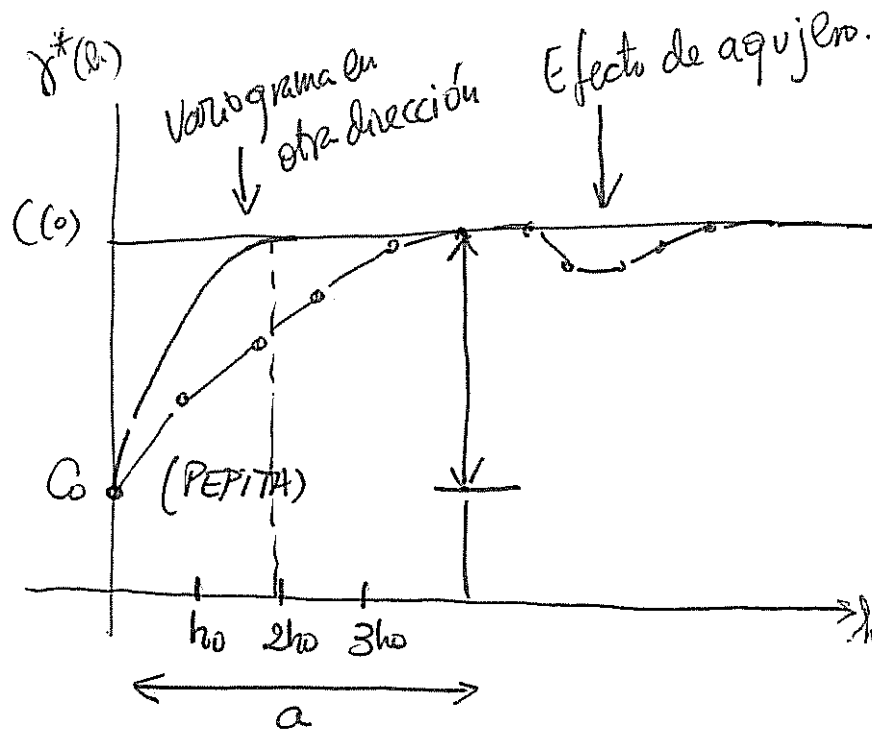
② Si la media μ de $Z(x)$ depende de h (no es constante)

por ejemplo $\mu(h) = a_0 h + b \Rightarrow$ Aparece un efecto parásito en $\gamma(h)$

debido al término $(\mu(x) - \mu(x+h))^2$ que aparecerá en $\gamma(h)$



Residuo $R(x) = Z(x) - m(x)$ variable estacionaria de media Nula



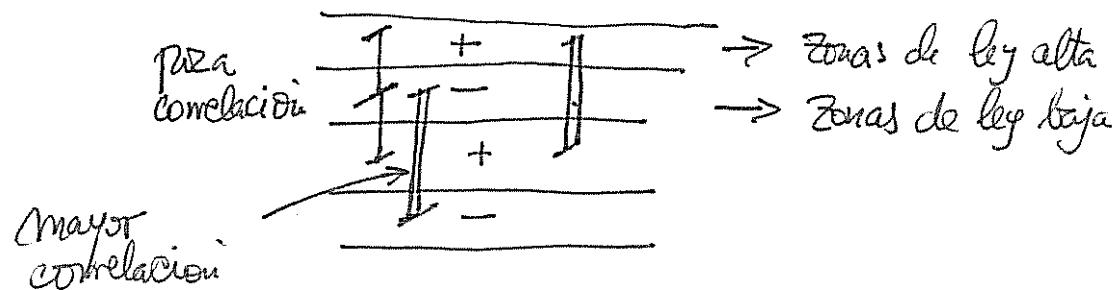
$C(0) - C_0$: variabilidad observable a la escala h_0 .

C_0 es la microvariabilidad.

$$\frac{C_0}{C(0) - C_0} \cdot 100 \% = \text{porcentaje de microvariabilidad sobre la variabilidad total observable}$$

$C(0) - C_0$ se consume en un alcance de a (metros).

El efecto de agujero se debe a la intercalación de zonas ricas y pobres de la variable $Z(\bar{x})$



Isotropía (en $\mathbb{R}^2$) (o en $\mathbb{R}^3$)

Diapo 8

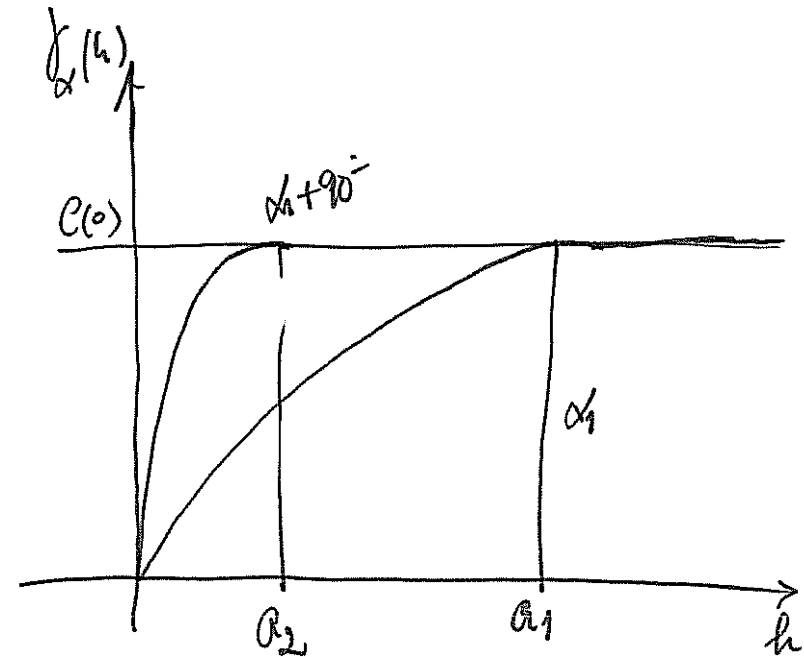
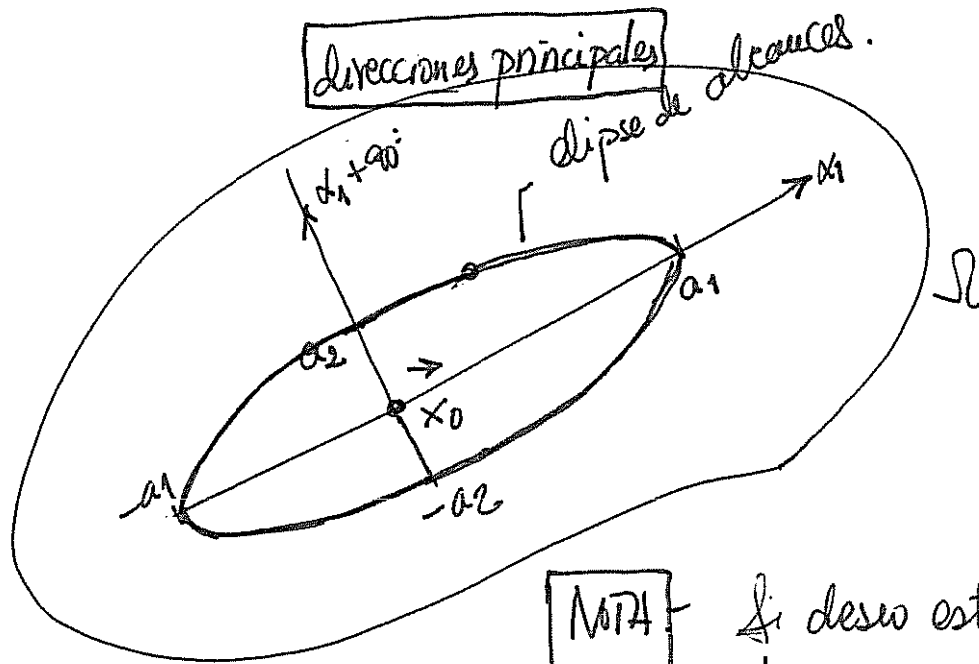
Mismo variograma independiente de la dirección.

(Abrauce, pepita, meseta, comportamiento en el infinito).

Anisotropía

- Elíptica
- ZONAL

Comportamientos diferentes del $\gamma(h)$ según α .

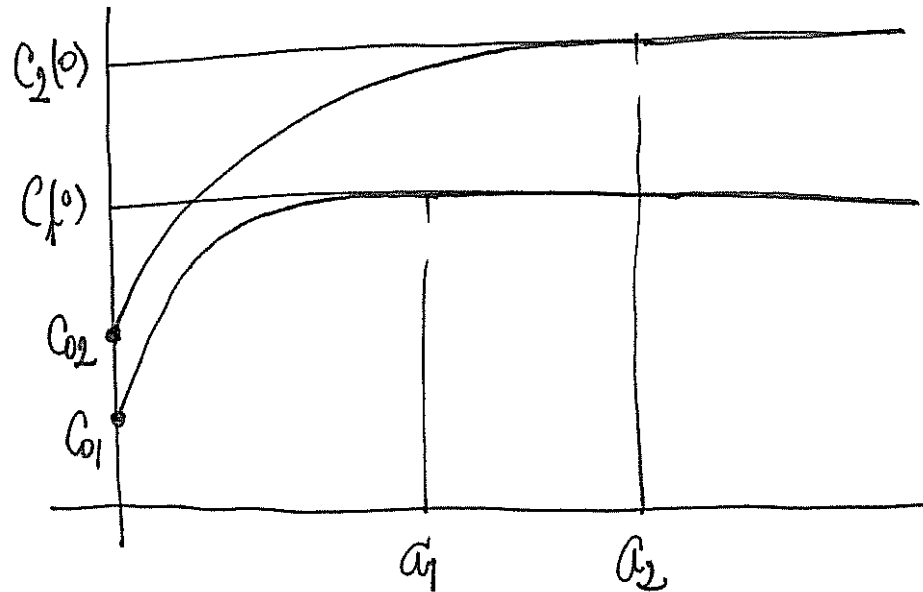


NOTA

Si deseo estimar $\tilde{Z}^*(\tilde{x}_0)$ todos los puntos de la elipse tendrían igual peso por estar a distancias diferentes de $\tilde{x}_0$

Anisotropía zonal

Diferentes mesetas, efecto pepita, alcances según las diferentes direcciones



Ejemplo - en el caso de una mineralización coexisten 2 mecanismos, uno en granos y otro por ejemplo asociado a fallas o intrusiones, y el resultado final es la suma de AMBOS

Modelos teóricos de Variogramas

Diapo 10

Se necesita ajustar el variograma experimental mediante variogramas o modelos teóricos que cumplan una serie de requisitos.

En particular el más importante es que las matrices de covarianza dato-dato que se generen a partir de ellos sean definidas positivas

$$\gamma^*(h) \longrightarrow \gamma_{(h)}^{\text{TEORICO}} \longrightarrow \underbrace{C(h) = C(0) - \frac{1}{2} \gamma_{(h)}^{\text{TEORICO}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{modelo teórico de covarianza}}}$$

$$\left\{ \vec{x}_\alpha \right\}_{\alpha=1, N}$$

Matriz de covarianza dato-dato

comparación entre Z_1 y Z_2

$$C_{\alpha\beta} \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2N} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica

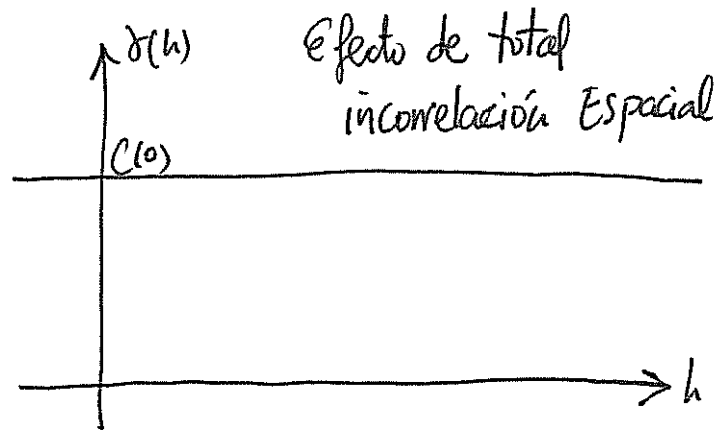
y
definida positiva

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^N$$

$$\vec{x}^T C_{\alpha\beta} \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$$

$\uparrow$ induce un producto escalar (es la matriz de Gram de un producto escalar)

Modelos teóricos



$$\gamma(h) = C(0) \quad \forall h \quad \text{Efecto Pepita Puro}$$

Diapo 11

Esférico

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(0) \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & h \leq a \\ C(0) & h \geq a \end{cases}$$

Exponencial

$$\gamma(h) = C(0) \left(1 - e^{-h/b} \right)$$

Gaussiano

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(0) \left(1 - e^{-h^2/a^2} \right), & h \leq a \\ C(0) & h \geq a \end{cases}$$

De la ESTADÍSTICA a la GEOESTADÍSTICA

3. Kriging

Kriging

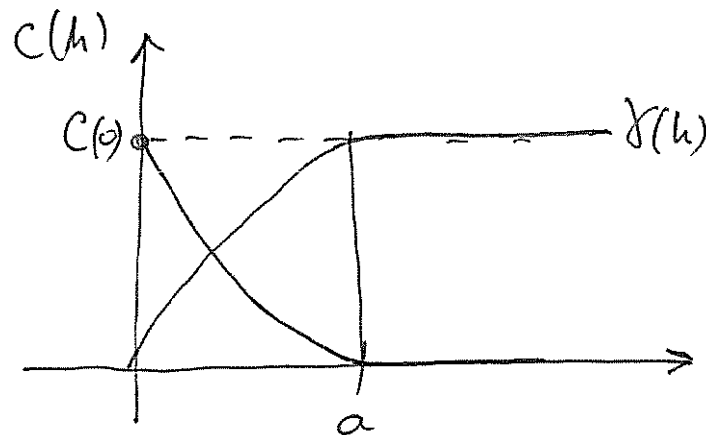
Datos: $Z(\vec{x}_\alpha)$ $\alpha = 1, \dots, N$

$\vec{x}_\alpha$: red de muestreo del fenómeno Z

$C(h)$ modelo de covarianza espacial $\Downarrow$

inferido a partir de técnicas de análisis estructural

Modelo teórico.



Problema: Estimar $Z^*(\vec{x}_0)$ $\vec{x}_0 \notin \vec{x}_\alpha$ (red de muestreo)

Tipos de interpoladores

- ① Interpolación lineal 2D
- ② Interpolación según d^{-2}
- ③ Kriging
 - Simple
 - Ordinario
 - Residual
 - Universal

- de V^s indicadores
- con deriva externa
- CoKriging
- $\vdots$

① Interpolación lineal

A) Dado $\vec{x}_0$

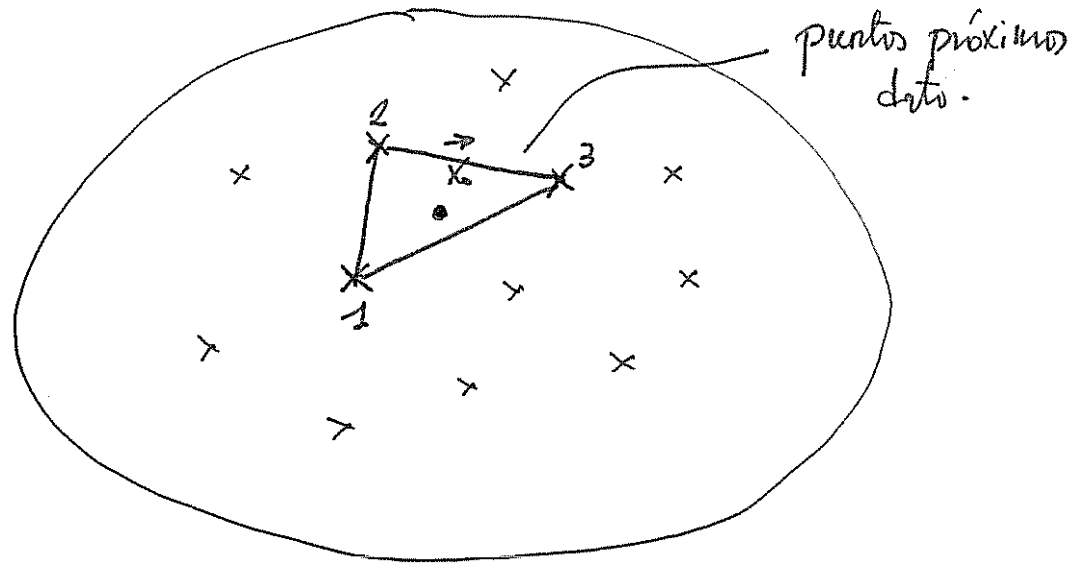
Hallar puntos 1, 2, 3

B) Ecuación del plano que
pasa por 1, 2, 3

$$1 \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow z_1$$

$$2 \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow z_2$$

$$3 \rightarrow (x_3, y_3) \rightarrow z_3$$



$$z = ax + by + c \quad \text{ecuación del plano}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}^*(\vec{x}_0) = a x_{01} + b y_{01} + c$$

$\Rightarrow$ no proporciona ninguna cuota del error de estimación.

② Estimación cuadrática

$$z = (a_0) + (a_1)x + (a_2)y + (a_3)xy + (a_4)x^2 + (a_5)y^2$$

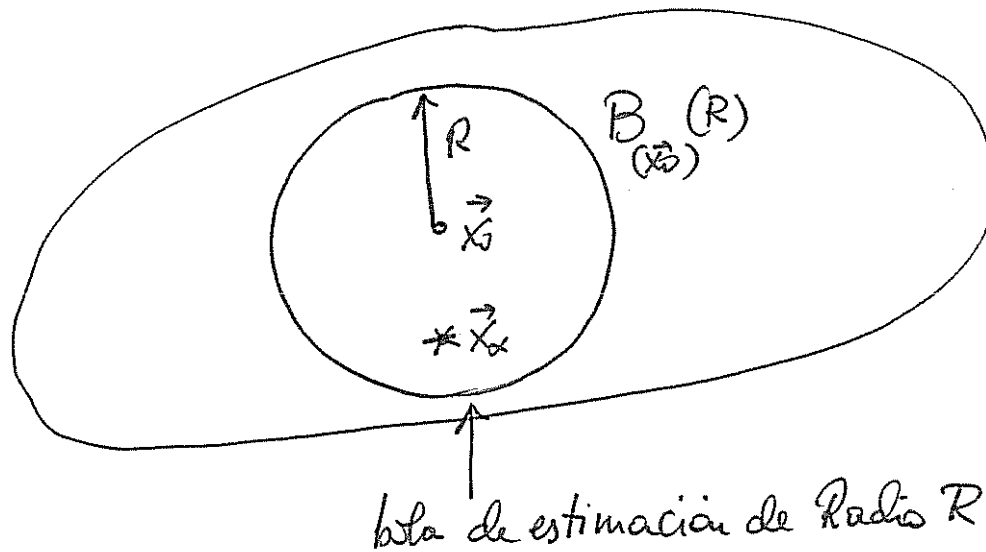
Se necesitan 6 puntos
que rodeen a $\vec{x}_0$

$\Leftarrow$ 6 coeficientes.

③ Estimación del inverso del cuadrado de la distancia

③

Isótropo



① Se buscan $\vec{x}_\alpha \in B_{\vec{x}_0}(R) \quad \alpha = 1, \dots, L$

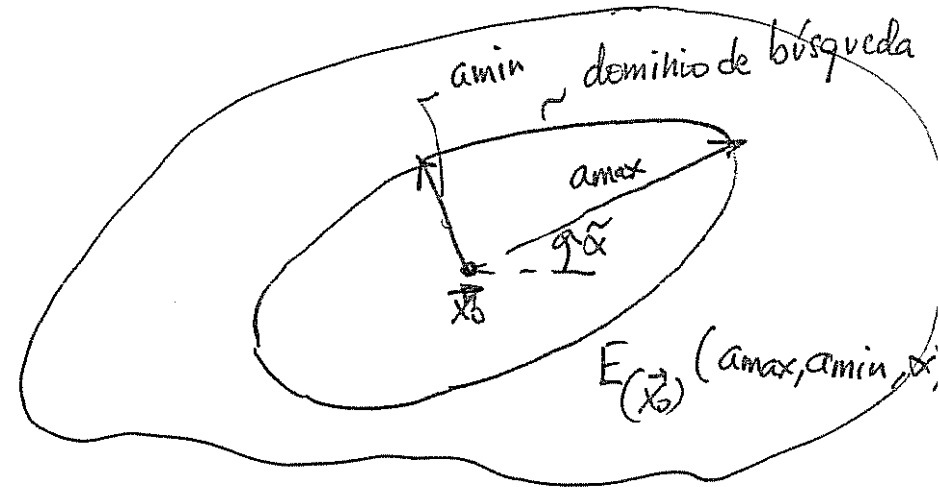
$$\vec{z}^*(\vec{x}_0) = \sum_{k=1}^L \lambda_\alpha \vec{z}(\vec{x}_\alpha)$$

$$\lambda_\alpha = \frac{a_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^L a_\alpha}$$

$$a_\alpha = \frac{1}{d_{\alpha 0}^2}$$

$$d_{\alpha 0} = \|\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0\|_2$$

Anisótropo



Idem pero ahora se tiene en cuenta que el dominio de búsqueda es elíptico.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Circulo de angulo } -\tilde{\alpha} \\ + \\ \text{transformación} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x' = \frac{x_{\tilde{\alpha}}}{a_{\max}} \\ y' = \frac{y_{\tilde{\alpha}}}{a_{\min}} \end{array}$$

← el problema se reduce a ①

Kriging Simple $\begin{cases} \textcircled{1} Z(x) \text{ estacionaria de 2º orden} \\ \textcircled{2} \text{ Se conoce } \mu = E(Z(x)) \end{cases}$

$$Z(x) = \mu + R(x) \Rightarrow E(Z(x)) = \mu + E(R(x)) = \mu \Rightarrow \boxed{E(R(x)) = 0.}$$

$$\text{Var}(Z(x)) = E(Z(x) - \mu)^2 = E(R^2(x)) = \text{Var}(R(x))$$

$$\gamma_Z(h) = E(Z(x+h) - Z(x))^2 = E(\cancel{\mu} + R(x+h) - \cancel{\mu} - R(x))^2 = E(R(x+h) - R(x))^2 = \gamma_R(h)$$

Conclusión $Z(x)$ y $R(x)$ poseen el mismo variograma

$$A) \quad \bar{Z}^*(x_0) = \mu + R^*(x_0) \quad R^*(x_0) = \sum_{k=1}^N \lambda_k R(x_k) \quad \text{con } R(x_k) = Z(x_k) - \mu.$$

$$B) \quad \text{Var}(Z(x_0) - \bar{Z}^*(x_0)) = \text{Var}(R(x_0) - R^*(x_0)) = \text{mínimo.}$$

$$\text{Var}(R(x_0) - R^*(x_0)) = \text{Var}\left(\sum_{k=0}^N a_k R(x_k)\right) \quad \text{con } \begin{cases} a_k = -\lambda_k \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

↑
variante de una combinación de v.s.a.s.

Kingeado SIMPLE (5)

$$\text{Var} \left(\sum_{k=0}^N a_k R(x_k) \right) = \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N a_{\alpha} a_{\beta} C(R(x_{\alpha}), R(x_{\beta})) =$$

$$= C(R(x_0), R(x_0)) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C_{\alpha\beta} - 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} C_{\alpha 0} = \phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$$

σ^2

$$\frac{\partial \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}{\partial \lambda_{\beta}} = 0 \quad \beta = 1, \dots, N \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} C_{\alpha\beta} - 2 C_{\beta 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\beta = 1, \dots, N$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & & & \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{N0} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{\alpha\beta} \vec{\lambda} = \vec{C}_{\alpha 0}$$

$$\boxed{\vec{\lambda} = C_{\alpha\beta}^{-1} \vec{C}_{\alpha 0}}$$

$\hat{U}$

matriz de covarianza (simétrica + definida positiva)
dato - dato

$$C_{ii} = \sigma^2 \quad (\text{varianza de } Z(x))$$

Observación ① $C_{\alpha\beta} = C(z(x_\alpha), z(x_\beta)) = C(h_{\alpha\beta})$

$$C_{\alpha\alpha} = C(z(x_\alpha), z(x_\alpha)) = C(h_{\alpha\alpha})$$

Se pueden calcular gracias a la hipótesis estacionaria.

② Si los v's a's dato están incorreladas $\Rightarrow C_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.



matriz covarianza dato-dato es diagonal

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot I_N$$

$$\Rightarrow \lambda_\alpha = \frac{C_{\alpha\alpha}}{\sigma^2} \quad \alpha = 1, \dots, N \quad \Rightarrow \underline{\underline{z^*(x_\alpha) = \mu + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N C_{\alpha k} R(x_k)}}$$

$\Rightarrow$ Si además $C_{\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow$ Incorrelación dato-incógnita $\Rightarrow \lambda_\alpha = 0$

Es decir la media es el mejor estimador en caso de incorrelación espacial.

$$\boxed{z^*(x_\alpha) = \mu}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{(h)} = \text{Efecto Pepita PVR}$$

Regresión Ordinaria Proceso Estacionario, μ desconocida.

$$E(Z^*(x_0)) = E(Z(x_0)) = E(Z(x_\alpha)) = \mu \quad \alpha=1, \dots, N \quad \text{Estimador insesgado.}$$

$$E(Z^*(x_0)) = \sum_{k=1}^N \lambda_k Z(x_k) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1}$$

$$\text{Var}(Z^*(x_0) - Z(x_0)) = \text{minimo} \quad \text{sueto a} \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k = 1 \quad (\text{Problema de optimización con restricciones})$$

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu) = \sigma^2 + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_\alpha \lambda_\beta C_{\alpha\beta} - 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha C_{\alpha 0} + \mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha - 1 \right)$$



$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha C_{\alpha\beta} + \mu &= C_{\beta 0} \quad \beta=1, \dots, N \\ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha &= 1 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{N0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En ambos casos se puede calcular el error de estimación para $\vec{\lambda}$

$$\boxed{\text{Error} = \sigma^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha C_{\alpha 0} + \mu \right)}$$

$$\boxed{C_{\alpha\beta} \cdot \vec{\lambda} = \vec{C}_{\alpha 0}}$$

OBSERVACION

$$A\vec{x} \neq \vec{b} \quad \vec{A} \in M_{(m,n)}$$

sistema lineal incompatible ($\vec{b} \notin \text{Im}(A)$)

$$A = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n] = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \vec{c}_i \in \mathbb{R}^m \\ \vec{f}_j \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$



Solución de mínimos cuadrados

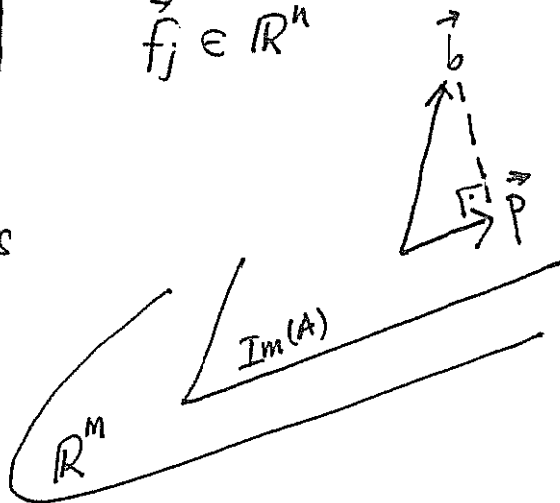
$$\text{Hallar } \vec{p} = \text{Proj}^\perp(\vec{b})$$



$$\text{Im}(A) = \langle \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n \rangle$$

proyección ortogonal de $\vec{b}$

sobre el subespacio $\text{Im}(A)$ de $\mathbb{R}^m$



$$\vec{p} = A \vec{x}_{MC}$$

Ecuaciones normales

$$(\vec{A}^T A) \vec{x}_{MC} = \vec{A}^T \vec{b}$$



Matriz de GRAM de la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(A)$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{bmatrix} \cdot [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n] = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{c}_n \cdot \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_n \cdot \vec{c}_n \end{pmatrix}$$

Sistema de Krigeado SIMPLE

$$C_{\alpha\beta} \cdot \vec{\lambda} = \vec{C}_{\alpha 0}$$

$$\vec{Z}^*(x_0) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \vec{Z}(x_k)$$

$$= (Z(x_1), \dots, Z(x_N)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{Z}(x_k)^T \cdot \vec{\lambda}$$

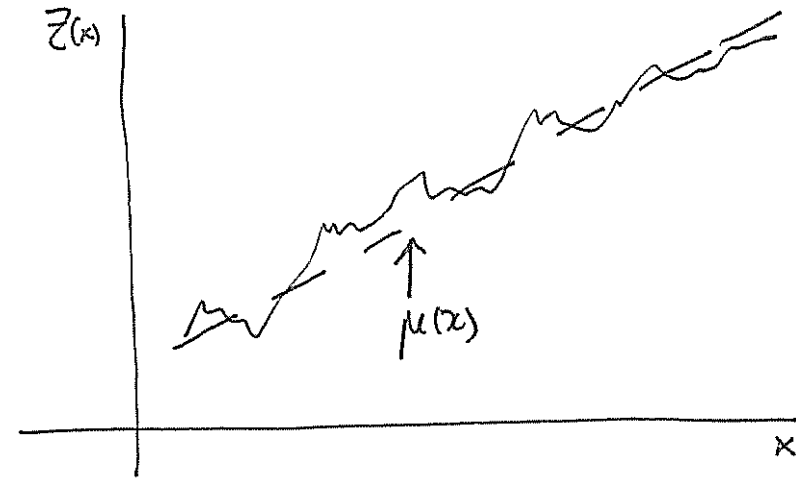
$C_{\alpha\beta} \iff A^T A$	En un espacio Euclideo de m. a.s.
$C_{\alpha 0} \iff A^T \vec{b}$	

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \cdot \vec{b} \\ \vec{c}_2 \cdot \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{c}_n \cdot \vec{b} \end{pmatrix}$$

Fenómenos no Estacionarios $\Rightarrow E(Z(x)) = \mu(x)$ denva

En $\mathbb{R}^2$ $\mu(\bar{x}) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ denva lineal

$\mu(\bar{x}) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$
denva Cuadrática.



Kriging ordinario $\mu(\bar{x})$ se ajusta por **MINIMOS CUADRADOS**

$Z(\bar{x}) = \mu(\bar{x}) + \underbrace{R(\bar{x})}_{\text{residual}} \Rightarrow V^s$ estacionaria de media NULA

$Z^*(x_0) = \mu(x_0) + \underbrace{R^*(x_0)}_{\text{estimado}} \rightarrow$ Se calcula mediante Kriging Simple

Kriging Universal

Se fija la forma de la denva (lineal / cuadrática) y se estiman al mismo tiempo los pesos λ_α del estimador $R^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha R(x_\alpha)$ y los coeficientes a_β de la denva.

Incógnitas $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_N, a_0, a_1, a_2, \dots \}$

$$\mu(\bar{x}) = \sum_{k=1}^P \underbrace{(a_k)}_{\substack{\sim \text{parámetros desconocidos} \\ \uparrow \\ \text{funciones de base de la deriva (conocidas)}}} f_k(\bar{x})$$

Condición de sesgo nulo

$$\mathcal{Z}^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$$

$$E(\mathcal{Z}^*(x_0)) = \mu(\bar{x}_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} E(Z(x_{\alpha}))$$

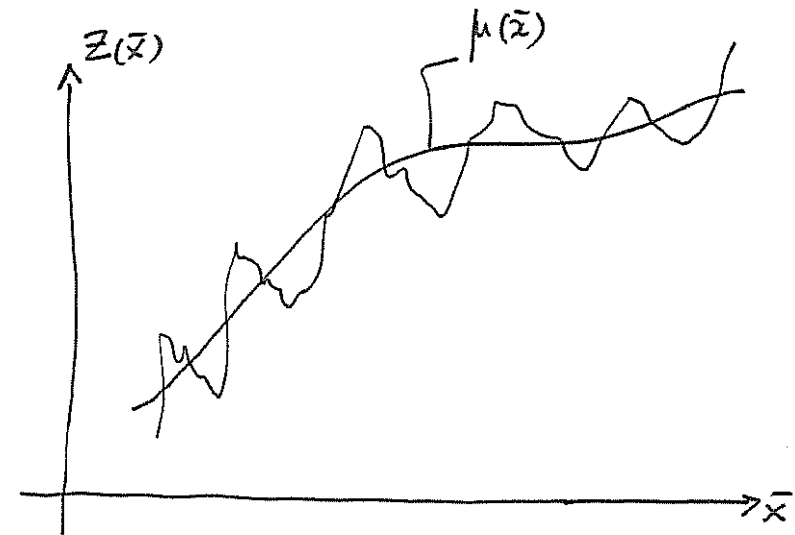
$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^P a_k f_k(\bar{x}_{\alpha}) = \sum_{k=1}^P a_k f_k(\bar{x}_0)$$

 $\Updownarrow$

$$\sum_{k=1}^P a_k \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} f_k(x_{\alpha}) \right) = \sum_{k=1}^P a_k f_k(\bar{x}_0)$$

 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} f_k(x_{\alpha}) = f_k(\bar{x}_0) \quad k=1, \dots, P}$$



restricciones sobre las funciones de deriva

Ejemplo - $f_1(\bar{x}) = 1$, $f_2(\bar{x}) = x$, $f_3(\bar{x}) = y$ (deriva lineal)

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1 \quad ; \quad \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} x_{\alpha} = x_0 \quad ; \quad \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} y_{\alpha} = y_0$$

Estas restricciones se añaden mediante multiplicadores de Lagrange al Pb de Estimación

Block kriging: Serve para proporcionar la estimación de una variable en un bloque V

(9)

$$\bar{Z}_V = \frac{1}{V} \int_V Z(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{valor medio de } Z(\bar{x}) \text{ en } V)$$

$$\bar{Z}_A = \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} Z_j(\bar{x})$$

$$\tilde{C}_{\alpha A} = \text{Cov} \{ \bar{Z}_A, Z_\alpha \} = E(\bar{Z}_A \cdot Z_\alpha) - E(\bar{Z}_A) \cdot E(Z_\alpha) =$$

$$= E \left\{ \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} Z_j(\bar{x}) \cdot Z_\alpha \right\} - E \left\{ \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} Z_j(\bar{x}) \right\} \cdot E(Z_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} (E \{ Z_j \cdot Z_\alpha \} - E(Z_j) E(Z_\alpha)) = \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} \text{Cov}(Z_j, Z_\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1N} & 1 \\ C_{21} & \dots & C_{2N} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & \dots & C_{NN} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1A} \\ \tilde{C}_{2A} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{NA} \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Point to block covariances.}$$

Indicator Kriging o Kriging de vs indicadoras

No se pretende estimar $Z^*(x_0)$ sino $P(Z^*(x_0) \leq c) = F^*(c) \rightarrow$ función de densidad de probabilidad acumulada de $Z^*(x_0)$

$\Downarrow$
incertidumbre asociada a $Z^*(x_0)$ si se estima para diferentes valores de c

¿Cómo se estima $F^*(c)$?

$$Z(x_\alpha) \rightarrow I_\alpha(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x_\alpha) \leq c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{variable indicadora} \\ \text{en } \vec{x}_\alpha \text{ para el cut-off} \\ c \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Nota: $F^*(v_c) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_j(v_c) \Rightarrow$ Proporción de valores de $Z(x_\alpha)$ inferiores a v_c

$\downarrow$
En este estimador todos los pesos son iguales, lo cual presupone incorrelación entre las variables $I_\alpha(v_c)$

Kriging con indicador

$$F^*(v_c) = \sum_{k=1}^N \underbrace{(\lambda_k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{variables indicadoras dadas}}} I_k(v_c) \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ pesos estimados por} \\ \text{Kriging} \end{array}$$

El krigado de v^s indicadoras posee algunas peculiaridades:

(1) Es necesario inferir los variogramas de $I_\alpha(v_c)$ para cada v_c .
 Los variogramas tienen una peculiaridad $\gamma_{I_\alpha}(h)$ tienen una meseta teórica de 0.25
 (o inferior a 0.25).

(2) El variograma o variogramas que se obtienen para valores de v_c próximos a la mediana son más regulares.

(3) El krigado de v^s indicadoras tiene que respetar las siguientes relaciones de orden

$$F^*(c_1) \leq F^*(c_2) \quad \text{si } c_1 \leq c_2$$



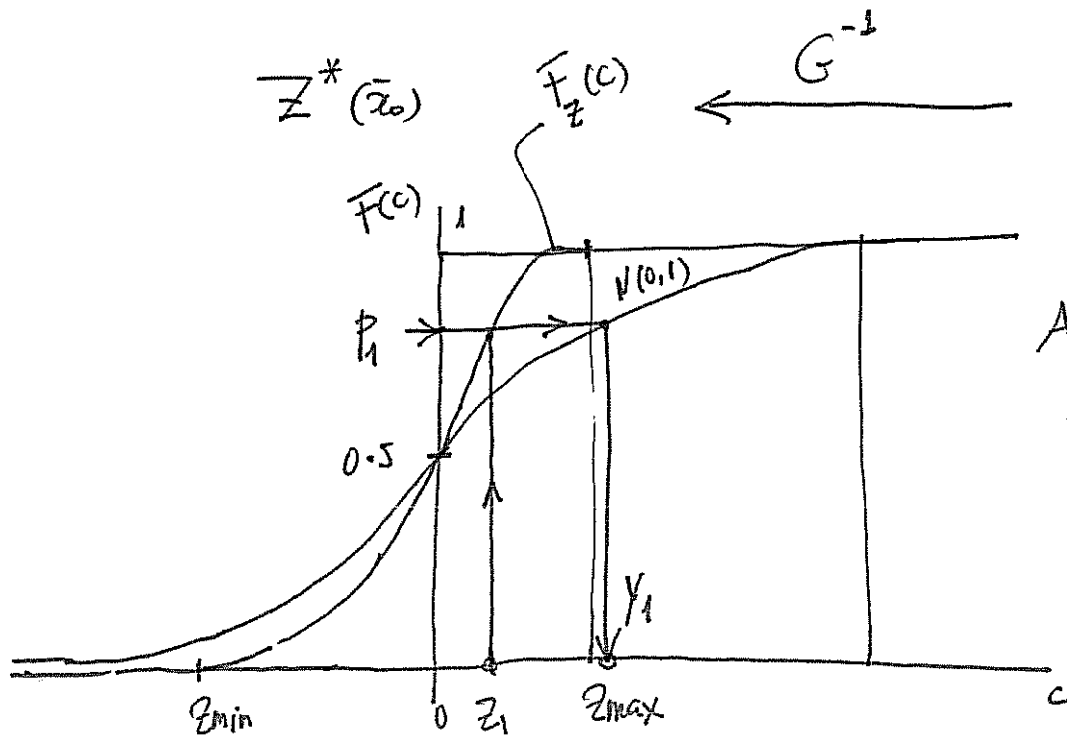
Corrección de las relaciones
de orden después de estimación.

Krigado con Anamorfosis de las VS Regionalizadas

Se demuestra que el estimador BLUE (Krigado) si la distribución multivariante de $Z(\vec{x})$ (función aleatoria) es Gaussiana.

$Z(\vec{x})$ no Gaussiana $\xrightarrow[\text{Anamorfosis}]{G}$ $Y(\vec{x})$ Gaussiana $N(0, L)$

Krigado



Anamorfosis de $F_Z(c)$ a la función de distribución de $N(0, 1)$

$$z_1 \rightarrow y_1$$

COKRIGEADO $Z_1(x), Z_2(x)$ son funciones aleatorias muestreadas en $\{\bar{x}_\alpha\}_{\alpha=1, N}$

Ejemplo: Ag, Au en un yacimiento Gossan
Lluvia, altimetría, temperatura, ...

$$Z_1^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha Z_1(\bar{x}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^N a_\beta Z_2(\bar{x}_\beta)$$

Estimación de Z_1 en $\bar{x}_0$
a partir de Z_1 y Z_2 y su
correlación cruzada.

$$C_{12}(h) = E\left\{ \left(Z_1(x+h) - \mu_1 \right) \left(Z_2(x) - \mu_2 \right) \right\}$$

Covarianza cruzada.

(Observación: $C_{12}(h) = C_{21}(-h)$ Y $C_{12}(h) \neq C_{12}(-h) \wedge C_{12}(h) \neq C_{21}(h)$)
no es necesariamente simétrica.

$$2\gamma_{12}(h) = 2C_{12}(0) - C_{12}(h) - C_{12}(-h)$$



$$\gamma_{12}(h) = C_{12}(0) - C_{12}(h)$$

si C_{12} es simétrica

si $E(Z_1^*(x_0)) = E(Z_1(x_\alpha)) = \mu_1 \Rightarrow$

$$\mu_1 = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \mu_1 + \sum_{\beta=1}^N a_\beta \mu_2.$$

&

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha = 1 \\ \sum_{\beta=1}^N a_\beta = 0 \end{array} \right.$$

$\text{Var}(Z_1(x_0) - Z_1^*(x_0)) = \text{MINIMA} \Rightarrow$ aquí aparece la covarianza cruzada en el desarrollo.

Krigado con información externa

↓
Alternativas al
Cokrigado.

{ combinado con regresión lineal
con deriva externa

(14)

① COMBINADO CON R.L

$Z(x_\alpha), Y(x_\beta)$

~ variable muestreada con mayor intensidad

① Establecer un modelo de regresión lineal $Z^*(x) = a Y(x) + b$.

a partir del conjunto de valores (Z_i, Y_i) $i=1, \dots, N$ comunes

② $Z^*(x_k) = a Y(x_k) + b$

$k=1, \dots, L$ son los puntos donde
se conoce Y y no Z .

③ $\{ Z(x_\alpha)_{\alpha=1, \dots, N}, Z^*(x_k)_{k=1, \dots, L} \}$
Medidos Krigado de $Z^*(x_0)$ Estimados.

Krigado con deriva externa → Consiste en calcular el valor esperado de Z mediante su relación
con Y (función de parecido)

$$\begin{cases} \sum \lambda_\alpha = 1 \\ \sum \lambda_\alpha Y(x_\alpha) = Y(x_0) \end{cases}$$

De la ESTADÍSTICA a la GEOESTADÍSTICA

4. Simulación Condicional

Técnicas de Simulación Condicional

El estimador de Krigado es un estimador
EXACTO de MINIMOS CUADRADOS

⇓
SUAVIZA LA REALIDAD

Las técnicas de Simulación Condicional son una
manera de simular el Residuo en puntos no
muestreados.

2 palabras

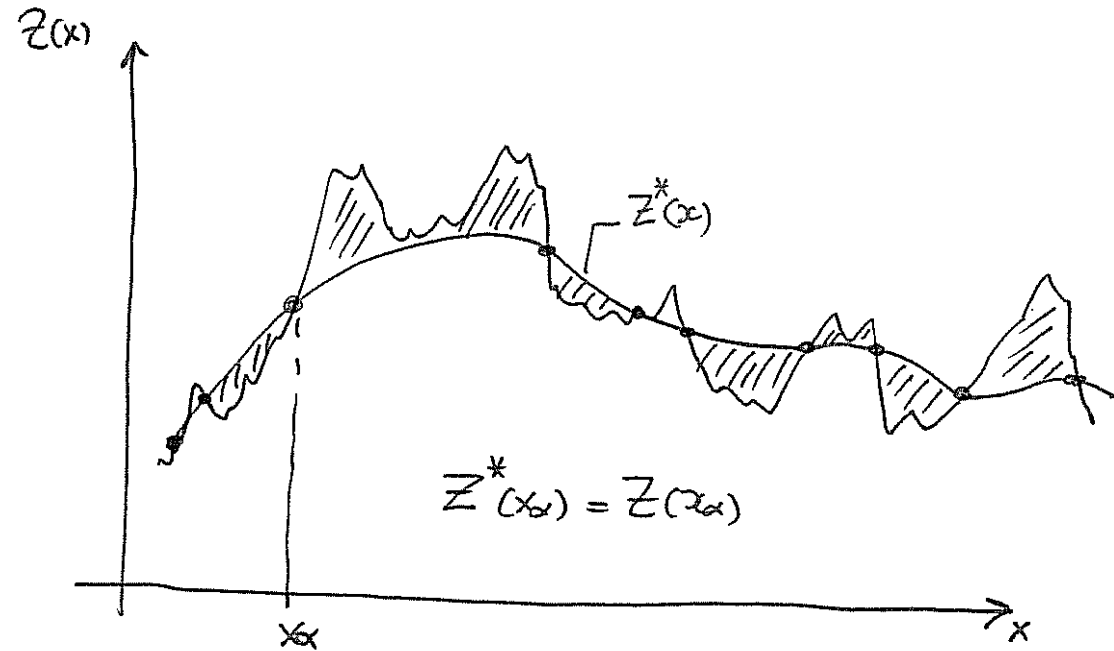
SIMULACIÓN : obtener variables regionalizadas ISOMORFAS
 $Z_c(x)$

$\gamma_{Z_c} = \gamma_Z \leftarrow$ variable regionalizada

CONDICIONAL

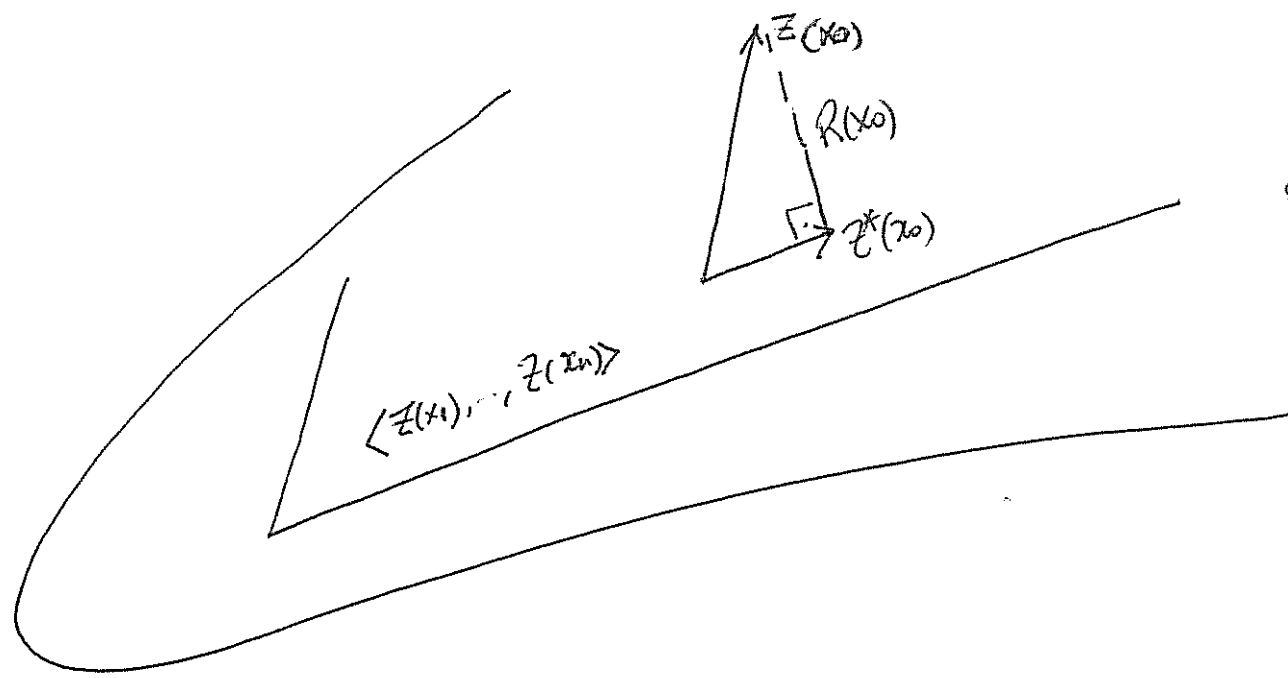
$$Z_c(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$$

x_α : val de muestreo.



Los algoritmos suelen ① SIMULAR

② CONDICIONAR



observación $R(x_0)$ es ortogonal a $Z^*(x_0)$

$Z^*(x_0)$ (estimador de Kriging) se puede interpretar como la proyección ortogonal de $Z(x_0)$ (desconocido) sobre el subespacio vectorial $\langle Z(x_1), \dots, Z(x_n) \rangle$ formado por los n^{os} datos

$$Z(x_0) = \underbrace{Z^*(x_0)}_{\text{BLUE}} + R(x_0)$$

Idea : SIMULAR el ERROR $R(x_0)$

$$Z_{\text{cs}}(x_0) = \underbrace{Z_K^*(x_0)}_{\text{Estimador de Kriging}} + R(x_0)$$

→ Error en x_0 simulado (obtenido) de una distribución de media NULA y varianza igual a la varianza de Kriging $\text{VAR}\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\}$

$$\bar{Z}_{sc}(x_0) = \bar{Z}^*(x_0) + R(x_0)$$

$$\textcircled{1} \bar{Z}_{sc}(x_\alpha) = \bar{Z}^*(x_\alpha) + R(x_\alpha) = \bar{Z}(x_\alpha) + 0 \Rightarrow \bar{Z}_{sc} \text{ es exacta}$$

$\textcircled{2}$ Posee la variabilidad correcta pues por ortogonalidad.

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ \bar{Z}_{sc}(x_0) \} &= \text{Var} \bar{Z}^*(x_0) + \text{Var} R(x_0) = \\ &= \text{Var} \bar{Z}^*(x_0) + \text{Var} (\bar{Z}(x_0) - \bar{Z}^*(x_0)) = \text{Var} \bar{Z}(x_0) \end{aligned}$$

Para asegurar que $\bar{Z}_{sc}(x)$ posee la misma estructura espacial (función de covarianza) que $\bar{Z}(x_\alpha)$ existen diferentes algoritmos.

$$\left[\bar{Z}_{sc}(x) = \underbrace{\bar{Z}_k^*(x)}_{\substack{\text{Estimador de Krigado} \\ \text{Construido a partir de } \{ \bar{Z}(x_\alpha) \}_{\alpha=1, \dots, N} \\ \text{vs. dato.}}} + \left[\underbrace{\bar{Z}_s(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{simulación no condicional}}} - \underbrace{\bar{Z}_{ks}^*(x)}_{\substack{\text{Estimador de Krigado} \\ \text{Construido a partir de } \{ \bar{Z}_s(x_\alpha) \}_{\alpha=1, \dots, N} \\ \downarrow \\ \text{valores de } \bar{Z}_s \text{ tomados en } \bar{x}_\alpha \\ \text{(SIMULADOS NO CONDICIONALMENTE)}}} \right] \right]$$

SIMULACIÓN NO CONDICIONAL GAUSSIANA De variable estacionaria
de media μ y función
de covarianza $C(h)$

- ① Doy la red de muestreo. $\{x_\alpha\} \alpha=1, N$
- ② Genero la matriz de covarianza $C_{\alpha\beta} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$
- ③ Descomposición de Cholesky de $C_{\alpha\beta} = L \cdot L^T$
- ④ Simulo $Y \sim N(0, I)$ de talla N

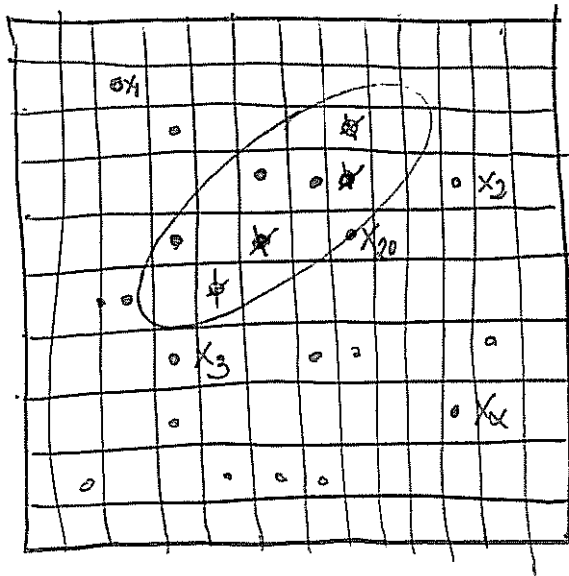
- ⑤ $Z_{NC} = \mu + L^T Y$ es una simulación
no condicional



A partir de Z_{NC} (no condicional)
se puede condicionar

pues $(Z - \mu)^T (Z - \mu) =$
 $= (L^T Y)^T (LY) = Y^T L L^T Y =$
 $= Y^T C_{\alpha\beta} Y$

Método de Simulación Secuencial



Sequential Gaussian Simulation

(non/Gaussian)

1) Se define un recorrido aleatorio visitando cada nodo de la malla.

2) Sea $\vec{x}_0$ un nodo de la malla a simular

A • Si existe dato $\vec{x}_x$ en dicho nodo entonces $z_{sc}(\vec{x}_0) = z(\vec{x}_x)$

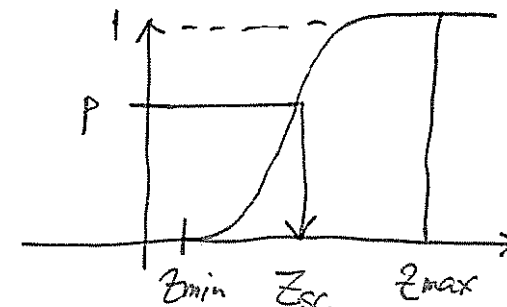
B • Si no existe dato se hace una búsqueda en el entorno de $\vec{x}_0$ teniendo en cuenta la estructura espacial del fenómeno y se buscan

$z(x_x)$ $z_{sc}(x_f)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 puntos medidos puntos simulados.

C • Se calcula la cdf

(D) • Se genera un número aleatorio $U(0,1) \Rightarrow p$
 $\downarrow$
 Se calcula z_{sc}

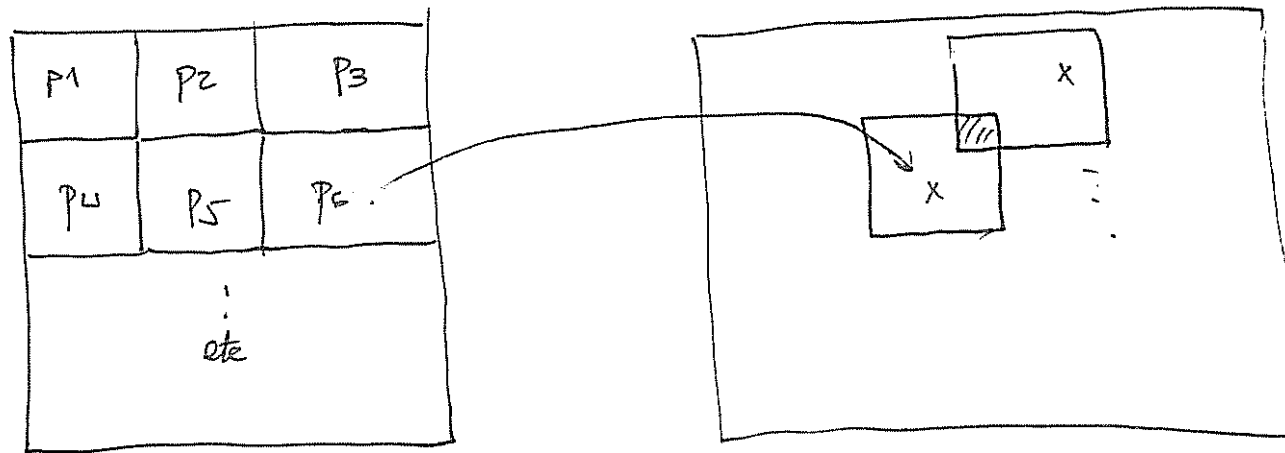
(E) Se EMPIEZA de NUEVO.



Geostatística Multipunto (Simulación)

Se trata de obtener simulaciones a partir de una imagen de submuestreo que se descompone en patrones

El método de simulación es similar al de SIMULACIÓN CONDICIONAL pero en lugar de simular nodo a nodo se pegan patrones enteros de una cierta talla



El mundo de la Simulación Condicional está variado como el krigado.

Su objetivo : Planificación mediante ^{estudio de} variabilidades espaciales por el krigado.