

NOTAS SOBRE MODELIZACION GEOESTADÍSTICA

(Versión 1.0)

Juan Luis Fernández Martínez
Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

28 de febrero de 2005

Resumen

El objeto de éstas notas es proporcionar de modo sencillo una perspectiva de los métodos de modelización geoestadística, analizando las fases de análisis estructural y su resolución con el programa Variowin 2-D, krigeado y métodos de estimación mediante el inverso del cuadrado de la distancia. Se trata pues de dar recomendaciones claras sobre la manera de abordar en el mundo industrial un proyecto geoestadístico. En el modo de exposición se entremezclan los consejos prácticos con los conceptos teóricos, y aunque una primera lectura de este manuscrito pueda parecer ardua, se trata de un documento autocontenido cuya comprensión mejora con el tiempo.

Índice

1. Antecedentes	3
2. Una breve introducción a la modelización matemática	4
2.1. Modelos deterministas	4
2.2. Modelos probabilistas	4
2.3. Modelos mixtos	6
2.4. Metodología de la Modelización	6
3. Variables Regionalizadas y funciones aleatorias	8
3.1. Inferencia de una función aleatoria	10
3.2. Hipótesis de modelización	11
3.2.1. Hipótesis estacionaria de segundo orden	11
3.2.2. Propiedades de la covarianza y del variograma de la F.A. estacionarias	13
3.2.3. F.A. no estacionarias	14
3.2.4. Funciones aleatorias intrínsecas	15
3.2.5. Funciones aleatorias no intrínsecas	15
4. Fases de un proyecto geoestadístico	17
4.1. Análisis estadístico de datos	18
4.1.1. Tablas de frecuencias e histogramas	18
4.1.2. Gráficos de calificación normal y lognormal	20

5. Análisis estructural	21
5.1. Resumen	21
5.2. Caracterización del variograma teórico	21
5.2.1. El alcance y la meseta	21
5.2.2. El comportamiento en el origen	21
5.2.3. El comportamiento en el infinito	22
5.2.4. El comportamiento direccional	22
5.3. Algunos modelos teóricos de variograma	23
5.3.1. Modelos con Meseta	23
5.3.2. Modelos sin meseta	25
5.3.3. Modelos con efecto de agujero	25
5.4. Combinación de semivariogramas	25
5.5. Inferencia del semivariograma teórico: el semivariograma experimental	26
5.5.1. Algoritmos de cálculo del semivariograma experimental	26
5.5.2. Dominio bidimensional	27
5.5.3. Dominio tridimensional	28
5.6. Ajuste del variograma experimental	28
5.7. Las estructuras anidadas y el efecto pepita	29
5.7.1. Estructuras superpuestas o anidadas	29
5.8. Herramientas del análisis estructural	30
5.8.1. Información adicional en el análisis estructural	30
5.8.2. Los diagramas de dispersión. Interpretación del semivariograma experimental	32
5.8.3. El variograma de superficie o variograma exhaustivo	32
5.8.4. El variograma omnidireccional	33
5.8.5. La nube del variograma	34
5.8.6. Otros descriptores espaciales	34
5.9. Algunas recomendaciones prácticas	36
6. Krigado o estimación	39
6.1. Introducción	39
6.2. Estimadores del inverso del cuadrado de la distancia	40
6.3. Método triangular	41
6.4. El krigado simple	41
6.4.1. Deducción de las ecuaciones de krigado simple	41
6.4.2. Interpretación del krigado simple	43
6.5. El krigado ordinario	44
6.5.1. Deducción de las ecuaciones de krigado ordinario	44
6.5.2. Interpretación del krigado ordinario	45
6.6. La trascendencia del desconocimiento de la media: su estimación	47
6.7. Krigado con anamorfosis	49
6.7.1. Krigado lognormal	49
6.7.2. Krigado con anamorfosis	49
6.8. Krigado de variables no intrínsecas	50
6.9. Algunos aspectos prácticos del krigado	53

1. Antecedentes

La *Geoestadística* nació en el ámbito minero, durante la década de los 60 y fué entendida en un principio como un método estadístico para el cálculo de las reservas mineras. En sus antecedentes suelen citarse los trabajos de [Sichel, 1947-1949] y de [Krige, 1951] en las minas de oro sudafricanas. El primero observó la naturaleza asimétrica de la distribución del oro, la equiparó a una distribución lognormal y desarrolló fórmulas básicas para su inferencia. Ello permitía una estimación de las reservas, pero suponía implícitamente que los datos eran independientes, prescindiendo por tanto dichos estimadores de la distribución espacial de los datos. Una primera aproximación a la solución de este problema fue dada por Krige que propuso una variante del método de medias móviles. Este método se puede considerar equivalente al del krigeado simple que, como veremos es uno de los métodos básicos de estimación lineal. La heterogeneidad de dichos yacimientos junto a la envergadura de las inversiones mineras, generaron un caldo de cultivo propicio para el desarrollo de las técnicas geoestadísticas, dado que resultaba inaceptable asumir un riesgo sobre reservas inexistentes. Los trabajos de Sichel y Krige interesaron a los ingenieros del Comisariado de la Energía Atómica de Francia, quienes encargaron a Georges Matheron la formalización matemática de dichos procedimientos, un tanto heurísticos en un principio. La *Teoría de las Variables Regionalizadas*, desarrollada por Matheron en 1961, permitió la formalización de los conceptos geoestadísticos, dándoles una formulación rigurosa y aportando una solución al problema de la estimación. En años sucesivos, la teoría fué ampliando su campo de aplicación en numerosos dominios extramineros tales como: la hidrogeología, la edafología, el reconocimiento forestal, el medio ambiente, la prospección de yacimientos petrolíferos, la cartografía automática, la geofísica y la geología, la meteorología, etc..., dado que tal y como el propio G. Matheron afirmó, la Geoestadística no debe entenderse no como la estadística aplicada al ámbito minero, sino como *la aplicación del formalismo de las funciones aleatorias al reconocimiento y la estimación de fenómenos naturales*.

En la actualidad la Geoestadística centra sus áreas de trabajo más activas en el estudio de sus posibles aplicaciones a las distintas ramas del conocimiento y a la búsqueda de formulaciones alternativas que permitan obtener una mejor caracterización de la variabilidad espacial de los fenómenos regionalizados. No obstante, la Geoestadística no debe entenderse como un método de extrapolación de información, i.e., *la Geoestadística no crea la información, sino que mejora su tratamiento*. La innovación aportada por la Geoestadística consiste en que permite obtener no sólo una estimación del fenómeno, sino también una medida de la incertidumbre de la misma, por lo que constituye un marco ideal para seleccionar la ubicación de puntos de muestreo de forma que se optimice la información obtenida a partir de los datos observados. Como caso particular, podemos señalar que en el ámbito minero esto se traduce en economizar gastos de reconocimiento, por ejemplo, mediante la optimización de una malla de sondeos de investigación. Es importante señalar que la bondad del resultado obtenido mediante la aplicación de las técnicas geoestadísticas dependerá de la calidad de la información utilizada (*Trash in-Trash out*), i.e., de la calidad del proceso de toma de muestras. Por tanto la fase previa al análisis geoestadístico de la información disponible tendrá tanta importancia como éste mismo.

En el campo del reconocimiento minero las ventajas de la Geoestadística son claras:

1. Caracteriza el *grado de continuidad* de cada mineralización particular y las diversas zonas de influencia (alcances) de la información disponible.
2. Permite *construir estimadores globales insesgados* de los recursos in situ, calculando los intervalos de confianza de los mismos.
3. Permite la *planificación* de la producción minera.
4. Aborda el problema de la *selección*, i.e., la definición de las reservas, clasificándolas mediante su incertidumbre.

5. Permite *simulaciones condicionales* del yacimiento, para el estudio de las fluctuaciones de las características de las reservas explotadas (las fluctuaciones de las leyes en impurezas, fluctuaciones de potencia, etc).

2. Una breve introducción a la modelización matemática

La modelización matemática engloba tres mundos claramente diferenciados:

- 1.-Modelos Deterministas
- 2.-Modelos Probabilistas
- 3.-Modelos Mixtos.

2.1. Modelos deterministas

Se dice que un modelo es determinista, cuando proporciona los mismos resultados si no se alteran los valores de los parámetros que lo gobiernan. Una gran cantidad de modelos deterministas vienen regidos por ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Estas ecuaciones surgen de la caracterización de un sistema físico mediante leyes o principios de conservación (conservación de la masa, de la energía, de la cantidad de movimiento, etc...). En este caso fijadas las condiciones de contorno y las condiciones iniciales del sistema, se tiene perfectamente determinada la solución (en el caso de que el modelo matemático esté correctamente planteado). Este es el caso por ejemplo de los modelos hidrogeológicos que estudian el problema del flujo en un medio poroso. Estos modelos se expresan por una ecuación en derivadas parciales en la que aparecen propiedades del medio tales como la permeabilidad (la facilidad con la que un terreno permite el paso de un fluido), el coeficiente de almacenamiento del medio poroso (volumen de fluido liberado por unidad de volumen de acuífero al descender el nivel piezométrico h en una unidad) y la incógnita principal o el nivel piezométrico del acuífero, que incluye los términos relativos a la altura de presión y a la altura topográfica. Realicemos algunos comentarios aclaratorios:

- El principio de comportamiento que rige dicha ecuación es la *Ley de Darcy*, que indica que la velocidad de filtración de un fluido en un medio poroso es proporcional al gradiente hidráulico y depende tanto de la densidad como de la viscosidad del fluido. Dicha ley indica que el movimiento de fluido tendrá lugar en contra del gradiente piezométrico y es análoga a la ley de Fourier que gobierna los fenómenos de transferencia de calor (basta para ello sustituir la permeabilidad por la conductividad térmica, el coeficiente de almacenamiento por la capacidad calorífica y el nivel piezométrico h por la temperatura) o a la ley de Fick que gobierna los fenómenos de difusión de contaminantes.
- El modelo hidrogeológico resulta de adoptar la ley de Darcy como principio de comportamiento del fluido y aplicar el principio de conservación de la masa a un volumen de control elemental realizando en este caso ciertas hipótesis simplificadoras. Dicho modelo rige los procesos de tipo irreversible, y debe de ser resuelto junto con las condiciones iniciales del sistema y de contorno correspondientes para que el modelo esté correctamente planteado (posea una única solución). Una vez prefijadas dichas condiciones en función del tipo de problema estudiado, la respuesta del modelo queda determinada por la ley de comportamiento. Se trata pues de un modelo determinista.

2.2. Modelos probabilistas

Se dice que un modelo es probabilista cuando su ley de comportamiento reposa en una serie de observaciones discretas del fenómeno analizado. En el caso anterior, se podrían realizar una serie de sondeos para determinar el nivel piezométrico a partir de los cuales se podría diseñar un estimador h^*

función de la información disponible $h(x_\alpha)_{(\alpha=1,n)}$, es decir, los niveles piezométricos en diferentes localizaciones espaciales (sondeos). En este caso la ley de comportamiento reposa en los datos observados y se trataría por ejemplo de inferir la siguiente ley de probabilidad:

$$P(h(x_1) \leq h_1, \dots, h(x_n) \leq h_n). \quad (1)$$

El nexo de unión entre ambos tipos de modelos radica en el hecho de que los datos observados deben reflejar la presencia de un fenómeno de tipo difusivo.

En general este tipo de modelos se adopta cuando se desconoce la ley de comportamiento del sistema o es muy compleja para su modelización. Esta ley se trata de inferir a partir de los datos observados. Esta, es una estrategia muy común en las ciencias naturales. Un ejemplo puede ser un yacimiento minero, donde queramos prever el valor de una cierta variable (por ejemplo el poder calorífico de una capa de carbón, su potencia, etc..) en un punto determinado o zona del yacimiento. La génesis de dicho yacimiento puede corresponder a la confluencia de diferentes modelos deterministas, sin embargo, dada la complejidad del fenómeno, no se posee una ley de comportamiento de la interacción entre los mismos, por lo que se **recurre** a un modelo probabilista. De hecho dicha interacción de ser conocida podría dar lugar a un modelo matemático determinista tan complejo que resulta poco útil en la práctica.

Para la mayoría de los fenómenos naturales hay que admitir un cierto grado de incertidumbre (o error) en las medidas. Por lo tanto los datos observados se conciben como el resultado de un proceso aleatorio. Esto no significa forzosamente que el fenómeno sea aleatorio, sino que nuestro conocimiento sobre el fenómeno es muy limitado.

Un punto clave que debe de ser comprendido cuando se trata de modelizar un fenómeno natural es que el hecho de que un fenómeno sea mal conocido no implica que sea imposible hacer predicciones sobre el mismo. En este caso es importante poder juzgar la incertidumbre ligada a nuestras estimaciones, es decir proporcionar intervalos de confianza de las mismas. Como ejemplo consideremos el experimento consistente en prever la suma del lanzamiento de dos dados. Intentemos modelizar dicho fenómeno. Un modelizador pesimista diría que como el resultado es aleatorio no merece la pena el predecirlo. Un modelizador un poco más avezado diría lo mismo pero acotaría el rango de soluciones entre 2 y 12. El acotar dicho rango puede parecer obvio, sin embargo filosóficamente implica haber meditado sobre el fenómeno, proporcionar un conocimiento a priori del mismo, luego en suma intentar controlarlo, aunque sea a un nivel muy primitivo. Un modelizador apasionado por los juegos de azar iría un poco más lejos, escribiría la tabla de posibles realizaciones y se percataría de que el suceso más probable es el número 7 que posee una probabilidad de aparición $P(S(\omega) = 7) = \frac{6}{36}$, es decir aparecería un 17% de las veces (suponiendo que se realizara muchas veces el experimento). En este caso el modelo adoptado es la conocida **regla de Laplace**. El **mejor estimador** en este caso sería por lo tanto $S^* = 7$, al ser el suceso de mayor probabilidad. Por ejemplo si eligiésemos como estimador el número 10, la probabilidad de aparición se reduciría a la mitad. En este caso el conocimiento del fenómeno posibilita la confección de diferentes estimadores con un cierto grado de certitud. Normalmente esto no suele ocurrir en el caso de los fenómenos naturales o en el caso general de los modelos probabilistas, en los cuales se conoce un conjunto limitado de realizaciones del fenómeno sin saber precisamente como han sido generadas. *En minería y en exploración de yacimientos las decisiones deben de ser tomadas al principio de la explotación, en un momento en que nuestro conocimiento sobre el fenómeno en cuestión es muy limitado, lo cual obliga a la realización de modelos de cuantificación probabilistas. Paradójicamente un yacimiento minero cuando mejor se conoce es cuando ya ha sido explotado y las ganancias o pérdidas financieras no pueden ser corregidas. Desde este punto de vista los modelos probabilistas deben de ser modelos dinámicos, es decir deben poder ser alterados según aumenta la cantidad de información disponible sobre el fenómeno analizado. Esta característica es una de las más importantes en el caso de los modelos geoestadísticos.*

Finalmente como veremos la ventaja que proporciona la teoría geoestadística con respecto a la estadística clásica, es que en las estimaciones se tiene en cuenta la estructura espacial del fenómeno

estudiado. Esta característica es muy importante, pues dos capas de carbón pueden poseer los mismos descriptores estadísticos y sin embargo corresponder a estructuras espaciales muy diferentes (*figura 1*). Además veremos que cuando una cierta variable, por ejemplo la potencia de una capa de carbón, se describe por sus momentos estadísticos de primer (potencia media) y segundo orden (desviación típica), implícitamente se ha asumido un cierto tipo de modelo de variación espacial (sin ninguna correlación espacial) y por lo tanto de estimador (la media).

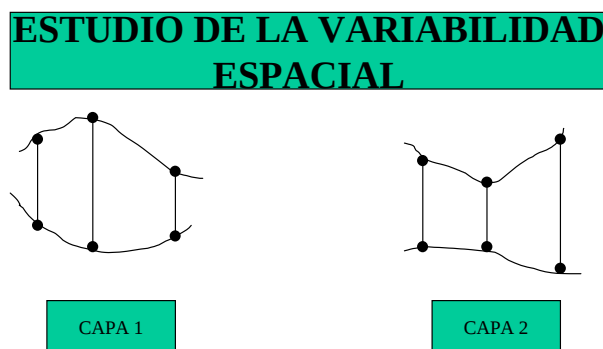


Figura 1: La importancia de la estructura espacial en minería.

2.3. Modelos mixtos

Por último cabe adoptar un enfoque híbrido en el cual la ley de comportamiento es determinista, sin embargo los parámetros de los que depende el modelo (dada la incertidumbre que pesa sobre ellos) son variables aleatorias. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas. En el caso de los modelos hidrogeológicos, se adoptaría como ley de comportamiento la ecuación del flujo en un medio poroso, sin embargo los parámetros de permeabilidad y almacenamiento serían variables aleatorias. En este caso la incertidumbre no proviene de la ley física que gobierna el sistema sino de los parámetros de los que depende dicha ley. Este tipo de modelos se utilizan por lo tanto en campos donde la física que gobierna el problema está tradicionalmente bien asentada, pero el rango de variación de los parámetros que controlan el funcionamiento del sistema es tan elevada que es necesario introducir forzosamente en el modelo una incertidumbre sobre su determinación.

2.4. Metodología de la Modelización

La modelización de cualquier problema se realiza en diferentes etapas:

1. Identificación del problema

Es la primera fase de la modelización. Requiere un profundo análisis del problema que se pretende resolver y fijar cuáles son los objetivos del modelo a desarrollar. Para ello debemos estudiar todos los datos de los que disponemos y saber cuáles son las **variables principales** que van a influir en nuestro problema. También debemos establecer la **precisión** que deseamos alcanzar con nuestro modelo, y en función del análisis anterior fijar el tipo de modelo adoptado, cara a la resolución de nuestro problema. En este caso, la existencia o no de una ley clara de comportamiento, su complejidad, y la posibilidad o no de adquirir datos inclinarán la balanza hacia una de las tipologías anteriormente comentadas.

2. Formulación del modelo matemático

Es la fase denominada de **conceptualización**. En ella se establecen las hipótesis necesarias para deducir las leyes de comportamiento del fenómeno estudiado, y se realizan las hipótesis

simplificadoras necesarias de modo a obtener el modelo representativo más sencillo. En todo caso debe de existir un compromiso entre complejidad y representatividad, de modo que los resultados obtenidos en fases posteriores (simulación) sean extrapolables al mundo real, cara a cumplir los objetivos prefijados en la primera fase.

En esta fase se estudia cómo influyen los diversos factores que intervienen en nuestro problema, se fija la terminología de las variables analizadas y se decide (si es necesario) el método de muestreo de dichas variables.

3. Simulación

La simulación se realiza mediante diferentes métodos, ya sean algebraicos, estadísticos o numéricos. Para esta fase de la modelización se requieren programas informáticos (uso del ordenador como instrumento de cálculo) que permitan aligerar la fase de generación y explotación de resultados: preproceso (entrada de datos), simulación numérica y postproceso (salidas de resultados gráficas y alfanuméricas).

4. Interpretación y control de calidad de resultados

Se establece cual es la sensibilidad del modelo (a los parámetros de los que depende) así como su capacidad para adaptarse a los requerimientos del problema. Para ello se deben tener en cuenta ciertas consideraciones que afectan a los datos y a los parámetros del modelo elegido. En esta fase se realiza:

- una **comparación del modelo con la realidad**, estableciendo las validaciones oportunas, para comprobar que éste es capaz de proporcionar una solución al problema con la precisión deseada. Las validaciones pueden ser de distintos tipos: físicas, con datos, con modelos sintéticos, etc.
- un **análisis de su precisión**, comparando la precisión alcanzada con la que se había establecido como deseada. Si el modelo no alcanza dicha precisión deberemos considerar su validez y analizar cuáles son las causas de la falta de precisión, por lo que se debe repetir el proceso de modelización desde la primera fase. Por contra si el modelo alcanza el rango de precisión requerido se continúa con la siguiente fase.

5. Fase de post proceso

En esta fase se analiza el cumplimiento de los objetivos fijados para el modelo y se planifica la futura utilización del modelo en la resolución del problema para el que ha sido diseñado.

Finalmente en todo proceso de modelización hay algunas generalidades que hay que tener en cuenta para realizar el mejor trabajo posible:

- Modelizar un fenómeno requiere más esfuerzo que el simple hecho de estudiarlo ya que se realiza un ejercicio de abstracción en el cual se deben analizar las hipótesis realizadas, los datos obtenidos, etc... y razonar sobre los mismos con el fin de realizar una correcta estimación.
- Cuando se modeliza siempre cabe la tentación de no hacer nada porque se puede hacer poco.
- En la modelización los datos de partida de los que se disponen tienen gran importancia, ya que con unos datos insuficientes o con unos datos “contaminados” el modelo resulta inservible.
- Siempre se debe asumir que un modelo es mejorable, y que quizás la solución proporcionada por el modelo obtenido no sea la correcta y no se ajuste a la realidad. Es por este motivo que siempre debe de haber una fase de calibración y valoración antes de dar éste como bueno.
- Modelizar correctamente significa avanzar en el conocimiento del mundo que nos rodea, ya que *“un modelo es la conjunción armónica del arte y de la ciencia.”*
- En definitiva, los modelos son para ser usados, no para ser creídos.

3. Variables Regionalizadas y funciones aleatorias

La teoría geoestadística aborda el estudio y modelización de variables que se denominan regionalizadas, que de forma intuitiva podemos definir como fenómenos espaciales que posee dos aspectos complementarios:

1. a nivel local un *aspecto aleatorio* asociado con las variaciones erráticas e impredecibles de la variable,
2. a nivel global un *aspecto general estructurado* que refleja las características generales del fenómeno (figura 2).

Las variaciones erráticas a pequeña escala de la V.R. son precisamente las que dificultan su modelización, tratamiento o descripción mediante un modelo determinista. En la teoría de las V.R. este problema de modelización se soluciona mediante la interpretación de una V.R. como la realización de una *función aleatoria*, que resulta ser estructurada, cuando se tiene en cuenta únicamente su comportamiento a gran escala, y errática o aleatoria cuando tenemos en cuenta el comportamiento a pequeña escala. Muchos fenómenos naturales presentan estas características, y es por ello, que no resulta sorprendente que el formalismo de las funciones aleatorias se aplique fundamentalmente al estudio de fenómenos naturales.

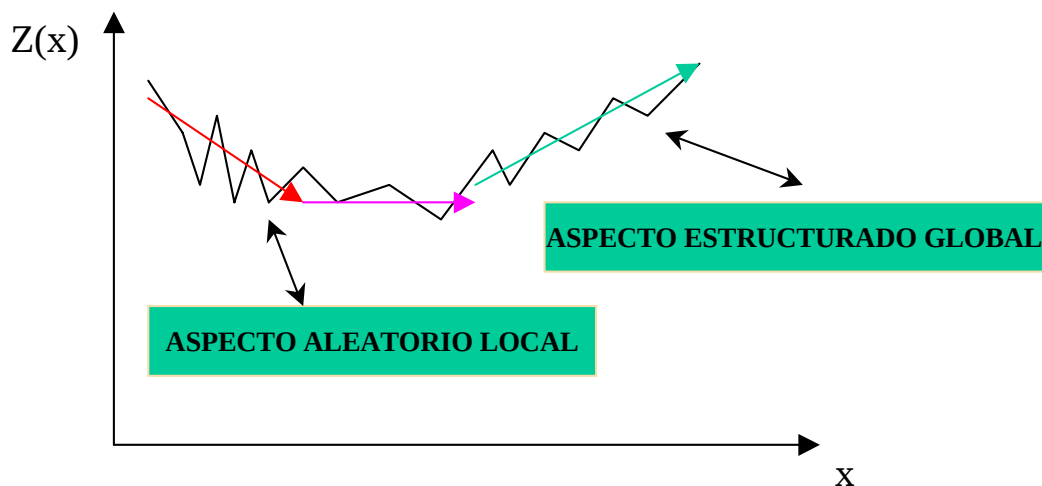


Figura 2: Aspectos de una variable regionalizada

Ejemplos de variables regionalizadas pueden ser:

- En *hidrología subterránea*: la conductividad hidráulica, la porosidad, el nivel piezométrico de un acuífero, la permeabilidad, etc.
- En *meteorología*: la precipitación, la presión, la temperatura, la velocidad del viento, etc.
- En *cartografía*: la altitud geodésica, la pendiente, etc...
- En *medio ambiente*: la concentración de un cierto contaminante en un medio, la resistividad, etc.
- En *reconocimiento forestal*: la distribución de manchas forestales, la cosecha por unidad de área, etc..

- En *minería*: la profundidad del techo de una capa, la potencia de la misma, su contenido en azufre o en cenizas, etc.

Los métodos de la Geoestadística se pueden considerar como una extensión de las series temporales. En este caso la variable objeto de estudio se considera una realización de una función aleatoria dependiente del tiempo, mientras que en la geoestadística los fenómenos objeto de estudio se consideran una realización de una función aleatoria dependiente del espacio y eventualmente también del tiempo (procesos espacio-temporales).

Los siguientes conceptos son de interés en lo que sigue:

■ Función aleatoria continua

Una función aleatoria $Z(\mathbf{x})$ es una aplicación del espacio $\mathbb{R}^n$ (normalmente uni, bi o tridimensional) en un espacio de variables aleatorias, es decir, a cada punto del espacio le hace corresponder una variable aleatoria.

■ Variable regionalizada continua

Una variable regionalizada $z(\mathbf{x})$ es una realización de una función aleatoria, es decir, una función real de una, dos o tres variables (las coordenadas).

En la práctica disponemos de una muestra de la variable regionalizada continua $z(\mathbf{x})$ sobre un conjunto de m puntos de muestreo $\mathbf{x}_\alpha$, regular o irregularmente repartidos en el dominio de estudio (red de muestreo). Introducimos por tanto las siguientes definiciones:

■ Función aleatoria discreta

Una función aleatoria discreta $Z(\mathbf{x}_\alpha)$ es el conjunto de variables aleatorias definidas sobre la red de muestreo $\mathbf{x}_\alpha$ (figura 3). También se denomina vector aleatorio de tamaño m asociado a la red de muestreo $\mathbf{x}_\alpha$ (figura 3):

$$Z(\mathbf{x}_\alpha) = [Z(\mathbf{x}_1), Z(\mathbf{x}_2), \dots, Z(\mathbf{x}_m)].$$

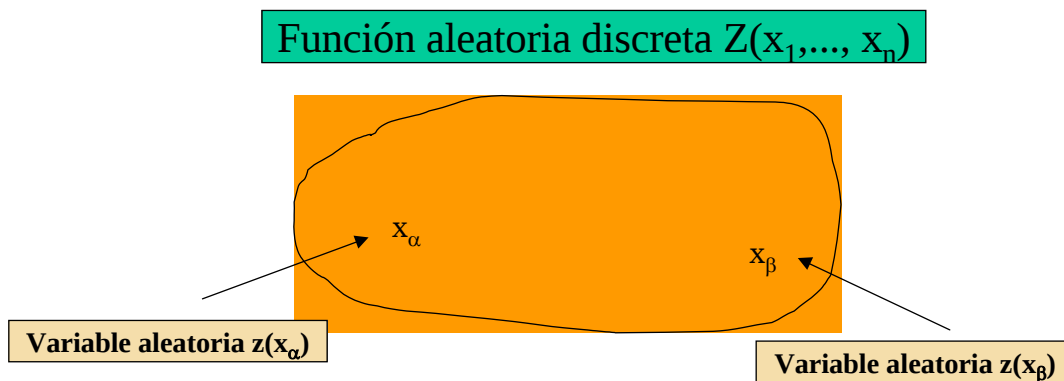


Figura 3: La noción de F.A. discreta.

■ Variable regionalizada discreta

Se denomina variable regionalizada discreta a cualquier muestra $z(\mathbf{x}_\alpha)$ de tamaño m . La variable regionalizada discreta es un vector m -dimensional, y se considera en el ámbito del modelo como una realización de la función aleatoria discreta $Z(\mathbf{x}_\alpha)$.

En la práctica imaginemos que poseemos una red de muestreo $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$ y que hemos realizado n campañas de medida. Dichas informaciones pueden ser estructuradas en una matriz de realizaciones

$$R = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 & z_3^1 & \dots & z_m^1 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \dots & z_m^2 \\ z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & \dots & z_m^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n & z_3^n & \dots & z_m^n \end{pmatrix}.$$

Cada una de las filas de la matriz es una variable regionalizada relativa a la función aleatoria

Una de las cuestiones abordadas en Teoría Geoestadística consiste en analizar si las componentes del vector aleatorio $Z(\mathbf{x}_\alpha)$ están correladas o no. El estudio de esta cuestión se denomina Correlación Espacial, y es uno de los problemas básicos abordados en un estudio geoestadístico (Análisis Estructural). Normalmente dicha correlación depende del módulo y de la dirección del vector separación entre los puntos de muestreo $\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$. En el caso en que las variables aleatorias que forman el vector aleatorio $Z(\mathbf{x}_\alpha)$ sean *dependientes*, se puede decir que el fenómeno presenta una estructura espacial con una cierta regularidad (continuidad y suavidad). Si fuesen *independientes*, sus realizaciones no estarían correlacionadas, y diremos que el fenómeno regionalizado presenta una estructura espacial discontinua e irregular, en cuyo caso, como veremos posteriormente, el mejor descriptor espacial es la media, siendo las técnicas geoestadísticas inoperantes.

3.1. Inferencia de una función aleatoria

Para describir la función aleatoria Z en la práctica, nos contentamos con determinar los *momentos de primer y segundo orden* de la función aleatoria $Z(x)$. Recordamos la definición de los mismos:

- La *Esperanza, media, tendencia o deriva*:

$$E[Z(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x}).$$

Se trata de un momento de centralización de $Z(\mathbf{x})$. En el caso más general la media es local, es decir, en el caso de un yacimiento minero la variable estudiada poseería una media que dependería de la localización espacial del sondeo.

- La *varianza*:

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] = E\{[Z(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})]^2\},$$

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la varianza e indica la dispersión en torno a la media.

- La *función de covarianza*:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E\{[Z(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})][Z(\mathbf{y}) - m(\mathbf{y})]\}$$

La función de covarianza es una medida de la similitud o parecido entre las variables aleatorias $Z(\mathbf{x})$ y $Z(\mathbf{y})$ que toman valores en los puntos respectivos $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de nuestro yacimiento.

- El *semivariograma*:

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} E\{[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{y})]^2\},$$

El variograma se define como $2\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^1$, y mide la dispersión entre las variables aleatorias $Z(\mathbf{x})$ y $Z(\mathbf{y})$.

- El *correlograma* $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y})}$.

¹ Sin embargo se usa indistintamente ambos términos para referirse a $\gamma(x, y)$.

3.2. Hipótesis de modelización

Planteemos el problema de la estimación: dada una variable regionalizada $z(\mathbf{x})$ (por ejemplo de génesis minera) que tenemos muestreada en un conjunto de puntos de muestreo $\mathbf{x}_\alpha$ (sondeos en nuestro caso), deseamos realizar una estimación de $z(\mathbf{x})$ en un punto no muestreado $\mathbf{x}_0$, que denotaremos $z^*(\mathbf{x}_0)$. Cabe preguntarse ¿qué tipo de hipótesis son necesarias para resolver dicho problema en la práctica?. Caben diferentes alternativas.

3.2.1. Hipótesis estacionaria de segundo orden

Si denominamos $Z(\mathbf{x})$ a la función aleatoria que modeliza nuestra variable regionalizada $z(\mathbf{x})$, diremos que es estacionaria si:

1. $\exists E[Z(\mathbf{x})] = m, \forall \mathbf{x}$, i.e., la media existe y no depende del punto (en nuestro caso significa que el yacimiento posee media constante)
2. Para toda pareja de variables aleatorias $\{Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{x})\}$, su covarianza

$$C(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{x}) = E[(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m)(Z(\mathbf{x}) - m)]$$

existe y sólo depende del vector de separación $\mathbf{h}$, es decir, si se tratase de la potencia de una capa de carbón significa que el parecido entre dos potencias depende de su distancia, y por lo tanto potencias más cercanas poseerán mayor parecido.

Es importante reseñar que ésta hipótesis solventa el problema de la estimación dado que permite conocer el parecido estructural $C(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_0)$ entre el dato $z(\mathbf{x}_\alpha)$ y la incógnita $z(\mathbf{x}_0)$ en función de la distancia entre ambos sondeos $\mathbf{x}_\alpha$ y $\mathbf{x}_0$ sin conocer previamente el valor de $z(\mathbf{x}_0)$ (que es de hecho nuestra incógnita).

La estacionariedad además posee otras consecuencias importantes:

- la varianza de $Z(x)$, $\sigma^2 = \text{Var}[Z(x)]$ existe, es finita y no depende de x , i.e.,

$$\sigma^2[Z(\mathbf{x})] = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] = \text{Var}(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})) = E[(Z(\mathbf{x}) - m)^2] = C(0).$$

- el semivariograma también es estacionario, depende sólo del vector de separación $\mathbf{h}$ y está relacionado con la covarianza, verificándose

$$\begin{aligned} 2\gamma(\mathbf{h}) &= E\left\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\right\} = E\left\{[(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m) - (Z(\mathbf{x}) - m)]^2\right\} = \\ &= \underbrace{E[(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m)^2]}_{\text{Var}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = C(0)} + \underbrace{E[(Z(\mathbf{x}) - m)^2]}_{\text{Var}[Z(\mathbf{x})] = C(0)} - \\ &\quad \underbrace{2E[(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m)(Z(\mathbf{x}) - m)]}_{2C(\mathbf{h})} = 2\text{Var}[Z(\mathbf{x})] - 2C(\mathbf{h}) = \\ &= 2C(0) - 2C(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

es decir,

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h}). \quad (2)$$

Esta relación implica que el variograma es otra medida del parecido estructural análoga a la covarianza.

- El correlograma es estacionario y depende sólo del vector de separación $\mathbf{h}$:

$$\rho(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{h})) = \frac{C(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \sigma(\mathbf{x})} = \frac{C(\mathbf{h})}{C(0)} = \rho(\mathbf{h}).$$

Observaciones

1. Cuando las funciones anteriores C, γ, ρ dependen solamente de $\|\mathbf{h}\|$ se dice que el fenómeno regionalizado es *isótropo*. En cualquier otro caso se dice *anisótropo*.
2. La relación (2) podría hacernos pensar que en el caso de F.A. estacionarias, el semivariograma es repetitivo, redundante e innecesario ya que se puede deducir de la función de covarianza. Sin embargo el semivariograma es independiente del valor de la media, mientras que la covarianza requiere su estimación, de ahí la ventaja de considerar el primero cuando la media es desconocida. En este sentido podemos decir que $\gamma(\mathbf{h})$ es un estadístico espacial más conveniente que $C(\mathbf{h})$.
3. Normalmente el semivariograma es una función monótona no decreciente, ya que al aumentar h también aumenta la diferencia entre $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x})$, i.e., disminuye su correlación espacial.
4. Conviene reseñar que la hipótesis estacionaria de segundo no es una entelequia matemática sino una decisión de modelización, y aunque no es verificable en la práctica pues atañe al modelo, conviene asegurarse que el análisis geoestadístico se restrinja a dominios donde ésta parece cumplirse.

3.2.2. Propiedades de la covarianza y del variograma de la F.A. estacionarias

1. Propiedades de la función de covarianza

- Condición de positividad

$C(\mathbf{h})$ debe de ser semidefinida positiva para asegurar que la matriz de covarianzas muestral lo sea y el problema de estimación (krigeado) esté correctamente planteado (posea una única solución). Esta es la razón por la que no se puede trabajar con los variogramas y covarianzas experimentales o muestrales y se deben ajustar unos modelos teóricos que verifiquen esta restricción.

- $C(0) = Var(Z(\mathbf{x})) \geq 0$, es decir la varianza es la covarianza a distancia cero, donde se alcanza el máximo grado de parecido estructural dado que se comparan las variables aleatorias con ellas mismas ($C(\mathbf{h}) \leq C(0)$).
- $C(\mathbf{h}) = C(-\mathbf{h})$, es decir el parecido entre las variables $Z(\mathbf{x})$ y $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y las variables $Z(\mathbf{x} - \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x})$ es el mismo.
- $C(\mathbf{h}) \leq C(0)$, para ello basta tener en cuenta que:

$$0 \leq E \left\{ [Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2 \right\} = 2C(0) - 2C(\mathbf{h}).$$

- En la práctica los fenómenos que modelizaremos poseen un modelo de covarianzas que se anula a una distancia finita denominada, **alcance, rango o zona de influencia**. A esta distancia, denotada por a , para la cual $C(a) = 0$, se verifica por tanto $\rho(a) = 0$, es decir dos variables $Z(\mathbf{x})$ y $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ no poseerán parecido si están una distancia superior al alcance. Esta distancia caracteriza la transición entre el estado de correlación espacial ($\|\mathbf{h}\| < a$) y la ausencia de correlación ($\|\mathbf{h}\| > a$) y es importante a la hora de definir el entorno de estimación de la F.A. en un punto $\mathbf{x}_0$. Además en minería es muy importante pues nos proporciona un criterio claro para diseñar las futuras campañas de sondeos (dos sondeos separados a mayor distancia que el alcance no poseerán parecido).

2. Propiedades del variograma

Son consecuencia de las propiedades para este tipo de F.A. de la función de covarianza:

- Condición de negatividad
 $\gamma(\mathbf{h})$ debe de ser semidefinida negativa para asegurar que el problema de estimación (krigeado) esté correctamente planteado.
- $\gamma(0) = 0$. Posteriormente veremos que el variograma experimental suele poseer una discontinuidad² en el origen, denominada efecto de pepita. También veremos que el efecto pepita debe de ser tratado como una estructura espacial autónoma, en la cual influyen los errores en las medidas (por otra parte siempre presentes en mayor o menor cuantía) y las microvariabilidades no observables a la escala h de nuestro muestreo.
- $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(-\mathbf{h})$,
- El variograma debe de crecer en el infinito menos que la parábola $g(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2$. De hecho en el caso de funciones estacionarias esta propiedad es evidente, pues el variograma debe de alcanzar la meseta a la distancia finita a (alcance). Esta propiedad es importante sin embargo a la hora de juzgar si una F.A. satisface o no la condición de estacionariedad³, es decir si existen o no diferentes medias locales.

La figura 4 muestra la gráfica de las funciones covarianza y variograma de una F.A. estacionaria de segundo orden y un variograma experimental correspondiente a una V.R. de este tipo.

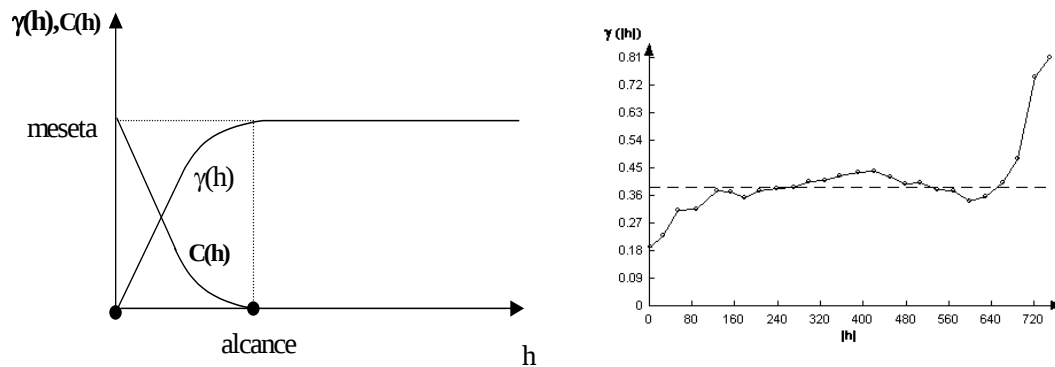


Figura 4: Variograma y covarianzas teóricos y variograma experimental de una F.A. estacionaria de segundo orden.

3.2.3. F.A. no estacionarias

La hipótesis estacionaria se puede aplicar a funciones que poseen una varianza y una covarianza finitas, lo que se traduce en una variabilidad espacial también finita. Sin embargo, existen funciones aleatorias y fenómenos físicos que no verifican este tipo de hipótesis. Este tipo de funciones aleatorias se dicen *no estacionarias*. Por este motivo es necesario introducir nuevas hipótesis para incrementar el ámbito de trabajo de la teoría geoestadística. Este es el caso de las F.A. que aparecen en hidrogeología (el nivel piezométrico) o en minería (la profundidad del techo o del muro de una capa de carbón con buzamiento).

En la práctica se manejan diferentes modelos:

² Es importante comprender que se trata de una discontinuidad dado que por definición $\gamma(0) = E[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x})]^2 = 0$

³ Como veremos dicho comportamiento en el infinito también es propio de las F.A. intrínsecas.

3.2.4. Funciones aleatorias intrínsecas

Se dice entonces que la F.A. es *intrínseca*⁴, cuando verifica las siguientes propiedades:

1. $\exists E[Z(x+h) - Z(x)] = 0, \forall h,$
2. $\exists \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] = f(h) \forall h,$

es decir, si considerados los incrementos de la F.A., éstos poseen media nula y una varianza finita que depende sólo del paso h .

Observaciones

- Se suele decir en la práctica geoestadística que los incrementos son estacionarios.
- En este caso es sencillo demostrar que se puede inferir el variograma de la F.A. $Z(x)$ y se verifica:

$$\gamma_z(h) = \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] = f(h).$$

- A diferencia de las F.A. estacionarias, en este caso no se puede asociar al variograma $\gamma_z(h)$ un modelo de covarianzas, es decir, la igualdad [2] no es cierta. Además dicho tipo de funciones suelen estar caracterizadas por tener una varianza (variabilidad estadística) infinita, es decir, la covarianza no está definida para $h = 0$.
- Las F.A. intrínsecas verifican que el variograma crece menos que la parábola $\|\mathbf{h}\|^2$ a grandes distancias, por lo tanto el variograma lineal $\gamma_z(h) = \alpha h$ es típico de éste tipo de funciones aleatorias.
- Finalmente cabe reseñar que una función aleatoria estacionaria de segundo orden es siempre intrínseca, sin embargo el recíproco no es cierto.

3.2.5. Funciones aleatorias no intrínsecas

Decimos que $Z(x)$ es una *función aleatoria no intrínseca*⁵ cuando se dan las siguientes circunstancias:

- su esperanza matemática presenta una deriva, i.e., $E[Z(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x})$, es decir la media depende del punto del yacimiento donde es considerada,
- sus incrementos de primer orden $[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]$ no verifican la hipótesis intrínseca.

Para trabajar con este tipo de variables en la práctica geoestadística se suelen manejar dos tipos de modelos:

1. F.A. residuales

Son aquellas que pueden ser expresadas como la suma de una componente determinista $m(\mathbf{x})$, denominada tendencia o deriva y de una componente estocástica o residuo $R(\mathbf{x})$, estacionario con media nula y variograma $\gamma_r(\mathbf{h})$. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} 2\gamma_Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{x}) &= E\left\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\right\} = \\ &= E\left\{[R(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - R(\mathbf{x})]^2\right\} + (m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x}))^2 = \\ &= 2\gamma_R(\mathbf{h}) + (m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x}))^2. \end{aligned} \tag{3}$$

⁴O débilmente estacionarias.

⁵También se conocen como *funciones aleatorias intrínsecas de orden $k > 0$* .

Si la deriva es lineal entonces $m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x}) = l(\mathbf{h})$ y el variograma crece como mínimo con $\|\mathbf{h}\|^2$, que es la característica fundamental de las funciones aleatorias no intrínsecas. Además para valores pequeños del paso, el término $(m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x}))$ es muy pequeño, y por lo tanto $\gamma_Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{x}) \approx \gamma_R(\mathbf{h})$, es decir la variable se comporta como estacionaria a pequeñas distancias y su variograma intenta estabilizarse en torno a una meseta, denominándose $\gamma_R(\mathbf{h})$ *Variograma subyacente* (figura 5). Sin embargo según h crece, empieza a influir notablemente el efecto de la deriva $(m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - m(\mathbf{x}))^2$, mostrando un crecimiento igual o superior al parabólico.

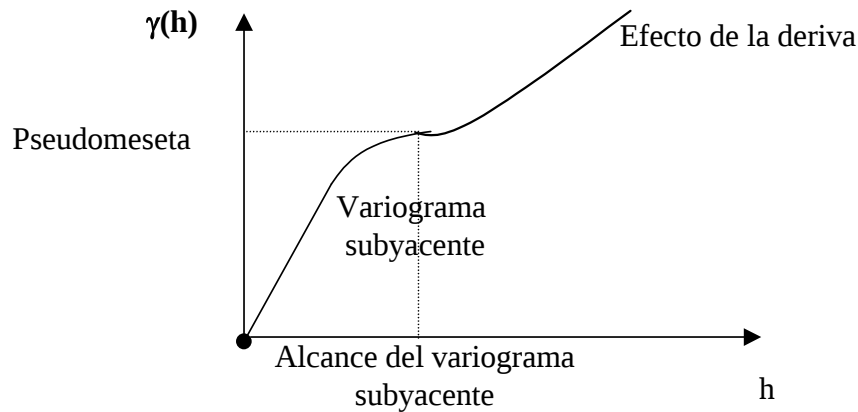


Figura 5: Variograma de una F.A. residual.

Este caso se suele plantear para la profundidad de techo o de muro de una capa de carbón con buzamiento. La manera de operar es mediante la técnica denominada de *Krigado Residual*, que consiste en:

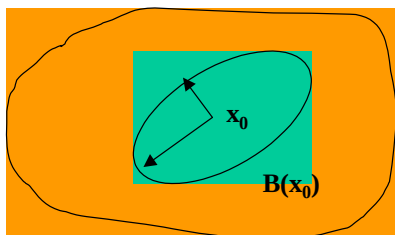
- ajustar la deriva $m(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{m}(\mathbf{x})$,
- determinar los residuos en los puntos de muestreo $R(\mathbf{x}_\alpha) = Z(\mathbf{x}_\alpha) - \tilde{m}(\mathbf{x}_\alpha)$ y comprobar⁶ que se trata de una variable estacionaria de media nula,
- estimar $R^*(\mathbf{x}_0)$ en los puntos no muestreados,
- restituir la deriva $Z^*(\mathbf{x}_0) = \tilde{m}(\mathbf{x}_0) + R^*(\mathbf{x}_0)$.

2. Funciones aleatorias cuasi-estacionarias o cuasi-intrínsecas

Consiste en considerar las F.A. estacionarias o intrínsecas no a escala global (la del yacimiento), que no lo son, sino si restringirse a un determinado entorno y para distancias limitadas $|h| \leq b$, para las cuales la F.A. o sus incrementos se pueden considerar estacionarios. En este caso, se dice que la función aleatoria es *cuasi-estacionaria o cuasi-intrínseca*. Esta manera de trabajar es muy lógica, dado que en la práctica la estacionariedad suele estar ligada a la escala de trabajo, de modo que fenómenos que reflejan un comportamiento no estacionario a gran escala (presencia de una deriva regional) pueden ser considerados estacionarios a escala local (dentro de su recinto de cuasiestacionariedad). Es importante además reseñar que esta *hipótesis de estacionariedad local* supone un compromiso entre la escala a la cual la función aleatoria se puede suponer estacionaria y la cantidad de datos de los que se dispone en dicho entorno⁷. Esta metodología de modelización da lugar a lo que se conoce como *Krigado en un entorno* (figura 6).

⁶ En rigor esta hipótesis no es comprobable; sin embargo se calcula el variograma de la V.R. $R(\mathbf{x}_\alpha)$ y se verifica que alcanza una meseta.

⁷ La geoestadística sin datos es inoperante e irrealizable.



ESTIMADOR DE KRIGEADO

- $Z^*(x_0) = \sum \lambda_\alpha Z(x_\alpha); x_\alpha \in B(x_0),$
- $E(Z^*(x_0)) = E(Z(x)) = m,$
- $E(Z^*(x_0) - Z(x_0))^2 = \min.$

Figura 6: Kriging en un entorno. $B(x_0)$ denota el recinto de cuasiestacionariedad en torno a la incógnita x_0 , donde se toman los datos para realizar la estimación.

En el caso en que la función sea considerada cuasi-estacionaria, la cuestión es cómo inferir su estructural espacial. Suelen utilizarse diferentes técnicas:

- inferir el variograma en una dirección en la que el fenómeno sea estacionario y considerar éste. Por ejemplo en modelos hidrogeológicos, como en el caso de variables techo y muro de capas buzantes, los variogramas calculados en direcciones perpendiculares al gradiente piezométrico o al gradiente de cota (según horizontales del plano de capa), muestran variogramas de transición (que se estabilizan en torno a una meseta).
- adoptar el variograma inferido en una zona en la que el yacimiento pueda ser considerado como estacionario.
- Finalmente en el caso en que la variable regionalizada pueda ser modelizada mediante una F.A. de tipo residual, en la cual la deriva a pequeñas distancias no posea influencia, se suele adoptar como modelo espacial el variograma subyacente (figura 5).

En cualquier caso no hay que olvidar que en un modelo geoestadístico la ley de comportamiento reposa en los datos observados, y aunque el modelo espacial adoptado no refleje todas las peculiaridades de la V.R., la estimación depende en gran medida de los valores muestreados.

4. Fases de un proyecto geoestadístico

Las diferentes fases de un proyecto geoestadístico en orden de ejecución son las siguientes:

1. Análisis estadístico de datos,
2. Análisis estructural,
3. Estimación o Kriging
4. Simulación condicional

Mientras que las dos primeras tratan sobre la caracterización estadística y espacial de los datos, las dos últimas pertenecen al ámbito de la extrapolación - interpolación de información.

En un proyecto geoestadístico la fase de Análisis estructural es primordial pues de ella dependerá la caracterización de la estructura espacial de nuestro fenómeno regionalizado y por tanto la calidad de los estimadores diseñados a posteriori.

En la fase de estimación o kriging se pretende construir el **mejor** (minimiza la varianza o error de estimación) estimador lineal (combinación lineal de los datos disponibles), insesgado (la media del estimador coincide con la de la población, sea ésta conocida o no a priori). Estos estimadores también se denominan *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*) o *BLUP* (*Best Linear Unbiased Prediction*).

En la fase de simulación condicional se pretende alcanzar un objetivo diferente al de la estimación, que es el de producir simulaciones que reflejen la variabilidad espacial del fenómeno y que respeten los datos observados, sin exigir la condición de *BLUE*, de ahí la importancia de un buen filtrado de datos anómalos y de una buena caracterización de la estructura espacial (fases 1 y 2).

Resumiendo, la fase 1 nos ayudará a diseñar el estudio geoestadístico de manera que se respeten las hipótesis de modelización. La fase 2 es crucial en el establecimiento de los pesos de estimación, por lo que en caso de dudas debe tenderse a estructuras conservadoras, aseveradas por nuestro conocimiento del fenómeno regionalizado, para evitar la generación de artefactos en las fases 3 y 4. La fase 3 produce la **mejor** realización suave del fenómeno regionalizado; mientras que lo que se pretende en la fase 4 es producir diferentes simulaciones equiprobables que pese a no ser óptimas con respecto al criterio de mínima varianza de estimación, respeten los datos y reflejen mejor la variabilidad espacial del mismo.

Cabe destacar que en un proyecto geoestadístico gran parte del peso del mismo recae en la fase de análisis estructural.

4.1. Análisis estadístico de datos

El análisis estadístico de la información disponible posee una gran importancia, pues pese a que los parámetros estadísticos no reflejan la estructura espacial del fenómeno regionalizado, la calidad de la información entrante determina la calidad y fiabilidad de los resultados obtenidos mediante la aplicación de las técnicas geoestadísticas.

Sus objetivos son los siguientes:

1. la caracterización del tipo de distribución estadística de los datos observados. Este punto es importante dado que los estimadores geoestadísticos son óptimos si la F.A. es normal.
2. La distinción de diferentes poblaciones de datos, que merecerían un trato geoestadístico individualizado.
3. El diseño de filtros adecuados en el caso de datos especialmente anómalos (outliers) que pudieran bien enmascarar, bien alterar, la estructura espacial del fenómeno.

4.1.1. Tablas de frecuencias e histogramas

Una de las formas más comunes de presentar datos es mediante el uso de tablas de frecuencias y sus correspondientes histogramas. Una tabla de frecuencias muestra los datos agrupados en ciertos intervalos de clase indicando cuántos pertenecen a cada intervalo, así como su frecuencia relativa al número total de datos expresada, normalmente, en tanto por ciento. Es usual tomar intervalos de clase de longitud constante para que la altura de cada barra sea proporcional al número de datos de cada clase.

Intervalo de clase	Número de datos	Frecuencia
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_i < v_i < b_i$	n_i	$(n_i/N) \cdot 100\%$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(4)

Tabla de frecuencias : v_i son los datos que están incluidos en un cierto intervalo de clase que tiene como extremos a_i y b_i , n_i el número de datos de dicho intervalo y N el número total de datos.

También se utilizan tablas de frecuencias acumuladas, en las cuales los datos se agrupan en intervalos de clase, pero en este caso, dentro de cada intervalo de clase se consideran aquellos datos que son

menores que un cierto valor. También se indica la frecuencia, que en este caso se denomina frecuencia acumulada de dichos datos:

Intervalo de clase	Número de datos	Frecuencia acumulada
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$av_i < a_i$	n_{a_i}	$(n_{a_i}/N) \cdot 100\%$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(5)

Tabla de frecuencias acumuladas: av_i son los datos incluidos dentro de cierta clase de distancia que tiene como extremo superior a_i , n_{a_i} es el número de datos incluidos en dicho intervalo y N es el número total de datos.

La manera más frecuente de visualizar una tabla de frecuencias (sea simple o acumulada) es mediante el uso de histogramas. En los histogramas se adjunta una descripción detallada de los siguientes parámetros estadísticos de la población:

- Número total de datos analizados
- Numero de datos excluidos
- Media, mediana y moda (μ, M, m)
- Desviación típica (σ)
- Coeficiente de variación (CV)
- Máximo y mínimo (máx, mín)
- Cuartil superior y cuartil inferior (C_s, C_i)

Observaciones

1. La media, la mediana y la moda son medidas de localización del centro de la distribución. Suponiendo los datos ordenados $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ la mediana viene dada por la expresión

$$M = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (6)$$

2. La mediana posee la ventaja con respecto a la media de ser una medida de localización más robusta con respecto a valores erráticos de los datos.
3. La moda es el valor que posee una mayor frecuencia en la población. Posee la desventaja de depender de la precisión de los mismos.
4. La desviación típica y la distancia entre cuartiles superior e inferior son medidas de dispersión de la población. Al no utilizar ésta última la media como medida de localización, es preferible a la desviación típica en el caso de valores erráticos presentes en la población.
5. El coeficiente de variación se define como

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

e indica la variación relativa de la desviación típica con respecto de la media. Es útil para comparar la precisión de dos conjuntos de datos diferentes, siendo más preciso aquel cuyo coeficiente de variación sea menor.

Como ejemplo la *figura 6* muestra el histograma de las leyes en oro del yacimiento de Carlés (Asturias) en el cual aparecen todos los parámetros comentados con anterioridad. En este caso la V.R. no posee un carácter normal.

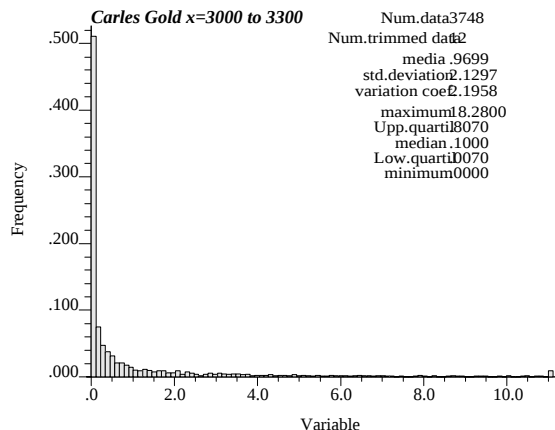


Figura 6: Histograma de la ley en oro del yacimiento de Carlés (Asturias).

4.1.2. Gráficos de calificación normal y lognormal

Como ha sido anteriormente mencionado, los métodos geoestadísticos de estimación asumen implícitamente que la distribución estadística de los datos es Gaussiana, o al menos, se aproxima mucho a ésta. La distribución Gaussiana es quizás la que se presenta con mayor frecuencia en la práctica. La justificación de este hecho es una consecuencia del Teorema Central del Límite que indica que la suma de un gran número de variables aleatorias tiende a ser normal, prescindiendo de las distribuciones de cada una de ellas. Este suele ser el caso de gran parte de los fenómenos estudiados en las ciencias de la tierra, que se generan debido a la interacción de multitud de factores (incluidos los errores de medida), muchos de ellos desconocidos, a los que se les puede asignar una interpretación estocástica. Sin embargo, en la bibliografía se encuentran reflejados numerosos ejemplos de variables reagionalizadas que exhiben un comportamiento diferente al gaussiano. Por ejemplo, la permeabilidad de un acuífero o las leyes en un yacimiento de oro, poseen un marcado carácter lognormal. En dichos casos, es necesario proceder a una anamorfosis de dichas variables, dado que una vez transformadas en normales los estimadores geoestadísticos proporcionarán resultados óptimos. Por tanto es importante evaluar el grado de aproximación de los datos muestrales a una distribución normal.

Existen numerosos test de normalidad. Entre éstos destacan por su sencillez los gráficos de calificación normal que son un tipo de gráficos de probabilidad acumulada cuya versatilidad radica en que la decisión de normalidad se visualiza gráficamente: el eje de ordenadas se escala de tal forma que si la distribución fuese gaussiana, las frecuencias acumuladas se alinearían sobre una recta. Con ayuda de éstos es relativamente sencillo decelar la existencia de varias poblaciones de datos en un misma muestra, estimar la importancia porcentual de cada una de ellas, así como la lectura de las principales medidas de localización y dispersión estadísticas.

La *figura 7* muestra el gráfico de calificación normal del caso comentado con anterioridad. Pueden observarse dos tramos lineales correspondientes a los valores de leyes $(0, 0.3)$, $(0.3, 11)$.

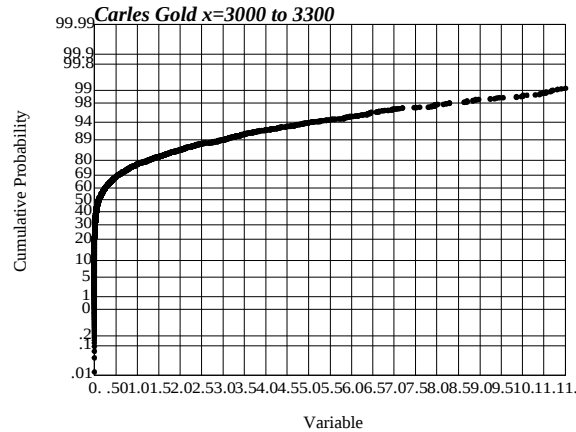


Figura 7: Gráfico de normalidad de la ley en oro del yacimiento de Carlés (Asturias).

5. Análisis estructural

5.1. Resumen

Hasta ahora nos hemos ocupado de establecer hipótesis que nos permitan modelizar una variable regionalizada mediante una función aleatoria, con el fin de poder inferir sus momentos de primer y segundo orden, que en Geoestadística lineal son los que nos interesan de cara a la estimación y simulación del fenómeno analizado. Para inferir el semivariograma se calcula el denominado *semivariograma experimental ó muestral*. Este proporciona una función sumamente irregular que resulta no tratable matemáticamente, dado que hemos visto que las funciones teóricas de covarianza y/o semivariograma deben de cumplir ciertos requisitos de positividad y/o negatividad. El análisis estructural trata de determinar la estructura espacial de la V.R. objeto de estudio a partir del ajuste del semivariograma experimental a unos modelos teóricos previamente introducidos. Estos permiten construir los sistemas lineales tanto del kriging (estimación) como de la simulación. Los parámetros de estos modelos teóricos (alcance, meseta, comportamiento en el origen, comportamiento direccional y comportamiento a grandes distancias) son los que nos indican las características estructurales de la regionalización.

5.2. Caracterización del variograma teórico

Sus parámetros de interés son los siguientes:

5.2.1. El alcance y la meseta

En el caso en que la función aleatoria Z sea estacionaria, el semivariograma γ alcanza un valor límite constante llamado *meseta* que coincide con la varianza de Z , i.e., $\exists \|\mathbf{h}\| = a$, tal que

$$\gamma(a) = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] = C(0)$$

La distancia a a la que se alcanza este valor se denomina *rango o alcance*, y marca la zona de influencia en torno a un punto de muestreo a partir de la cual ($h > a$), $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x})$ no están espacialmente correladas.

5.2.2. El comportamiento en el origen

El comportamiento en el origen proporciona información sobre la regularidad o suavidad del fenómeno regionalizado. Para ello consideremos en principio tres casos:

a. **comportamiento parabólico:** la función de covarianza en un entorno del origen (correlación a pequeñas distancias) se puede escribir:

$$C(\mathbf{h}) \stackrel{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0}{\sim} C(0) - \alpha \|\mathbf{h}\|^2,$$

con lo que la correlación es muy alta a pequeñas distancias y la variación de la V.R. en dos puntos próximos es pequeña, es decir, se trata de V.R. muy suaves. Según aumenta α (pendiente en el origen del variograma) disminuye la regularidad de la V.R.

b. **comportamiento lineal:** la función de covarianza en un entorno del origen (correlación a pequeñas distancias) se puede escribir:

$$C(\mathbf{h}) \stackrel{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0}{\sim} C(0) - \alpha \|\mathbf{h}\|,$$

con lo que la correlación disminuye como $\alpha \|\mathbf{h}\| \gg \alpha \|\mathbf{h}\|^2$ y es indicativo de V.R. continuas pero con menor regularidad que en el caso anterior. Asimismo la regularidad de la V.R. disminuye según aumenta α (pendiente en el origen del variograma).

c. **efecto pepita puro:** la función de covarianza en un entorno del origen (correlación a pequeñas distancias) se puede escribir:

$$C(\mathbf{h}) \stackrel{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0}{\sim} 0, \quad \gamma(\mathbf{h}) = C_0 \quad \forall \mathbf{h},$$

que indica una ausencia total de correlación a pequeñas distancias, con lo cual el campo es muy irregular.

d. caben **combinaciones de los comportamientos parabólico y lineal con un efecto pepita en el origen**, lo cual implica una regularidad de la V.R. inferior a los casos correspondientes sin pepita.

5.2.3. El comportamiento en el infinito

El comportamiento a grandes distancias del variograma es importante para poner de manifiesto la presencia de efectos no estacionarios, dado que como vimos, en el caso de V.R. estacionarias e intrínsecas, éste debe de ser un infinito de menor orden que $\|\mathbf{h}\|^2$.

5.2.4. El comportamiento direccional

Distinguiamos varios casos:

1. **Isotropía:** cuando el variograma $\gamma(\mathbf{h})$ sólo es función de $\|\mathbf{h}\|$, no dependiendo de la dirección. En este caso la variabilidad estadística (meseta) así como espacial (alcance) de la función aleatoria Z es idéntica en todas la direcciones del espacio.

2. **Anisotropía geométrica o elíptica:** cuando la variabilidad estadística de la F.A. es idéntica en todas las direcciones, poseyendo la variabilidad espacial dos direcciones principales de alcance máximo y mínimo, ajustándose el resto de alcances en las distintas direcciones a una elipse de anisotropía que posee como semiejes dichos alcances. La anisotropía elíptica queda pues determinada por los siguientes parámetros⁸:

- meseta,
- dirección de alcance máximo φ y ratio de anisotropía $\lambda = \frac{a_{\text{mín}}}{a_{\text{máx}}}$.

Conocidos φ y λ es posible transformar el modelo anisótropo (elipse) en un modelo isótropo (círculo) que nos permita trabajar con una única característica estructural en todo el dominio de la V.R.

⁸Nos referimos a V.R. bidimensionales. En el caso de V.R. tridimensionales esto se generaliza para el elipsoide anisotropía.

3. Anisotropía zonal

Una F.A. se dice que presenta una anisotropía zonal si su variabilidad estadística y espacial varían según las distintas direcciones del espacio. Este tipo de anisotropía se suele interpretar como la superposición de distintos modelos de variabilidad espacial (**estructuras anidadas**).

5.3. Algunos modelos teóricos de variograma

Presentamos algunos de los modelos teóricos de variograma más utilizados en la práctica geoestadística y que están presentes en la mayoría de los programas comerciales de geoestadística, dado que cubren prácticamente una amplia gama de aplicaciones.

Los modelos teóricos de semivariograma se pueden clasificar según la aparición o no de una meseta en el crecimiento de $\gamma(\mathbf{h})$. Los más importantes son los siguientes:

1. *Modelos con meseta o de transición:*

- **Efecto Pepita puro.**
- Comportamiento lineal en el origen: **modelos esférico y exponencial.**
- Comportamiento parabólico en el origen: **modelo Gaussiano.**

2. *Modelos sin meseta: modelos monómicos o en h^θ .*

3. *Modelos con efecto de agujero (con o sin meseta).*

5.3.1. Modelos con Meseta

Efecto pepita puro

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0, \\ C_0 & \forall h > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Se puede interpretar como un modelo de transición con un alcance ε que es mucho menor que la escala de muestreo de la variabilidad espacial del fenómeno estudiado, es decir, una ausencia total de correlación espacial al menos a la escala del muestreo.

Conducta lineal en el origen Es el comportamiento más común que nos encontramos en el estudio de la estructura espacial de los yacimientos minerales (referente a leyes, potencia, variables de calidad, etc...). Es muy frecuente que los variogramas experimentales vayan acompañados de un *efecto pepita*, que se traduce en una discontinuidad de primera especie del variograma en el origen. Entre los modelos de variogramas que exhiben dicha conducta cabe mencionar:

- **Modelo esférico**

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(0)\left(\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\frac{h^3}{a^3}\right) & \forall h \in [0, a] \\ C(0) & \forall h \geq a \end{cases}$$

Observaciones

- Este modelo de variograma alcanza la meseta a la distancia finita a (alcance). Su pendiente en el origen es,

$$\left(\frac{d\gamma(h)}{dh}\right)_{h=0} = \frac{3}{2}\frac{C(0)}{a}, \quad (8)$$

con lo cual la tangente en el origen alcanza la meseta $C(0)$ a una distancia $r = \frac{2}{3}a$.

- Este tipo de modelo es típico de variables mineras tales como la potencia.

■ Modelo exponencial

Su variograma viene dado por

$$\gamma(h) = C(0) \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right). \quad (9)$$

Observaciones

- El modelo exponencial se caracteriza por no alcanzar la meseta para un valor finito de la distancia, sino que la alcanza asintóticamente, es decir,

$$C(0) = \lim_{h \rightarrow \infty} C(h) = C(0) \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right). \quad (10)$$

En este caso el **alcance efectivo** se considera que es $a' = 3a$, para el cual

$$\gamma(a') = C(0) (1 - \exp(-3)) = 0,95 C(0). \quad (11)$$

- La pendiente en el origen de este modelo es:

$$\left(\frac{d\gamma(h)}{dh} \right)_{h=0} = \frac{C(0)}{a}, \quad (12)$$

con lo cual alcanza la meseta a una distancia $r = a' = \frac{a}{3}$. Esta distancia es menor a igual alcance efectivo que la del variograma esférico, es decir, *el modelo exponencial posee una mayor pendiente en el origen $\left[\frac{3C(0)}{a'} \right]$ que el modelo esférico $\left[\frac{3}{2} \frac{C(0)}{a} \right]$, con lo cual éste último es indicativo de V.R. de una mayor regularidad.*

- Este variograma es típico de variables mineras, tales como las variables de calidad en yacimientos de carbón, leyes en yacimientos minerales, modelos de precipitaciones, etc...

Conducta parabólica en el origen Los fenómenos que se ajustan a este modelo de semivariograma tienen una estructura espacial muy continua. A veces los variogramas experimentales que se ajustan a este modelo teórico van acompañados de un ligero efecto pepita debido a errores de medida.

- El más utilizado es el **Modelo Gaussiano**, cuyo variograma viene dado por

$$\gamma(h) = C(0) \left(1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right). \quad (13)$$

Observaciones

- Al igual que el modelo exponencial no alcanza la meseta para un valor finito de la distancia, sino que la alcanza asintóticamente. En este caso el alcance efectivo se considera que es $a' = a\sqrt{3}$, para el cual $\gamma(a') = 0,95 C(0)$.
- Su pendiente en el origen es nula, por tanto es indicativo de variables regionalizadas muy regulares, con un comportamiento casi determinista.
- La adopción de este modelo teórico en ausencia de efecto pepita suele originar inestabilidades numéricas en la fase de krigeado.

5.3.2. Modelos sin meseta

Las variables que se ajustan a estos modelos son no estacionarias, intrínsecas o no intrínsecas. Uno de los modelos más utilizados son los denominados *monómicos o de potencia* cuyo variograma viene dado por

$$\gamma(h) = h^\theta, \theta \in (0, 2). \quad (14)$$

Observaciones

- En la práctica se usa el modelo lineal para las funciones aleatorias intrínsecas

$$\gamma(h) = \omega h \quad (15)$$

siendo ω la pendiente en el origen.

- En el origen ($h \rightarrow 0$) el modelo lineal puede adaptarse a cualquier variable con el mismo comportamiento (por ejemplo, los modelos esférico y exponencial).
- A medida que aumenta θ el comportamiento en el origen de $\gamma(h) = h^\theta$ se va haciendo más regular. Vemos que $\theta = 0$, corresponde a un efecto pepita puro.
- Experimentalmente, se comprueba que los modelos en h^θ con $\theta \in (1, 2)$ son equivalentes a un efecto de deriva parabólica. En estos casos la decisión de si se trata de un fenómeno no estacionario o de un modelo h^θ con $\theta \rightarrow 2$, se toma en función de que la V.R. presente o no una deriva clara de la media.
- El parámetro de potencia debe de ser inferior a 2 pues para $\theta \geq 2$ la función $[-\gamma(h)]$ no es definida positiva.

5.3.3. Modelos con efecto de agujero

El semivariograma correspondiente a fenómenos que se ajustan a este modelo corresponde a variables con alternancia de zonas con distinta variabilidad espacial. Por ejemplo, en el ámbito minero podría ser el caso de un yacimiento con alternancia de zonas ricas y zonas pobres de la correspondiente V.R.

El variogramas más común con efecto de agujero es:

$$\gamma(h) = C(0) \left(1 - \frac{\sin h}{h}\right). \quad (16)$$

Este modelo tiene un comportamiento parabólico en el origen

$$\gamma(h) \stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2}{6}. \quad (17)$$

5.4. Combinación de semivariogramas

A continuación enunciamos un resultado que amplía enormemente las posibilidades de los modelos teóricos de semivariograma considerados hasta el momento:

- La combinación lineal de semivariogramas con coeficientes positivos sigue siendo un semivariograma. Para ello, basta considerar la función aleatoria $Z(x)$, combinación lineal de n funciones aleatorias independientes $Y_i(x)$

$$Z(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i(x)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de semivariograma y covarianza, así como la independencia de las variables $Y_i(x)$ se tiene que

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \gamma_i(h) \quad (18)$$

$$C(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 C_i(h) \quad (19)$$

donde γ_i y C_i denotan respectivamente, el semivariograma y la función de covarianza de la F.A. Y_i .

5.5. Inferencia del semivariograma teórico: el semivariograma experimental

Como hemos visto el *semivariograma teórico* se define:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E \left\{ [Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2 \right\}. \quad (20)$$

En el caso de F.A. estacionarias o intrínsecas, éste también se puede definir como:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} Var [Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})],$$

dado que el incremento aleatorio $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})$ posee media nula.

En la mayoría de las aplicaciones, el dominio de la función aleatoria Z es un subconjunto Ω de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. Como sólomente conocemos realizaciones de la F.A. en un conjunto finito de puntos (red de muestreo), se puede inferir mediante el siguiente estimador, denominado *semivariograma experimental*

$$\gamma^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}_i)]^2 \quad (21)$$

donde $Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x}_i)$ son los valores que toma la función aleatoria Z en los puntos $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_i + \mathbf{h}$ y $N(\mathbf{h})$ es el número de pares de puntos pertenecientes a la clase de distancia $\mathbf{h}$.

5.5.1. Algoritmos de cálculo del semivariograma experimental

El cálculo del semivariograma experimental implica el uso de un algoritmo de captura de datos para determinar las $N(\mathbf{h})$ parejas de puntos pertenecientes a la clase de distancia $\mathbf{h}$. Veamos distintos casos según la dimensión del dominio de la V.R. objeto de estudio.

Dominio unidimensional Datos alineados regularmente espaciados

En este caso calculamos el semivariograma experimental aplicando la fórmula anterior, y tomando los datos de forma que $Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x}_i)$ estén separados por una distancia $\mathbf{h}$. Así, se van tomando los datos situados a las distancias $\mathbf{h}_0, 2\mathbf{h}_0, 3\mathbf{h}_0, \dots, n\mathbf{h}_0$, y graficando $\gamma^*(\mathbf{h})$ frente a $\mathbf{h} = n\mathbf{h}_0$. En este caso el número de parejas de datos situados a una distancia $n\mathbf{h}$ disminuye linealmente ($N(n\mathbf{h}) = N - n$) al aumentar ésta. Esto hace que para distancias grandes la estimación del semivariograma sea poco fiable, por lo que cabe imponer un límite a $N(h)$ para su interpretación. Dicho de otra manera, los puntos de la cola del semivariograma (comportamiento en el infinito) tienen menos fiabilidad que los puntos de la cabeza del mismo (comportamiento en el origen).

Datos alineados irregularmente espaciados En este caso los datos se agrupan en clases de distancias, utilizándose para calcular el valor de $\gamma^*(\mathbf{h})$ todos los pares de puntos situados en el intervalo $(\mathbf{h} \pm \varepsilon(\mathbf{h}))$. Por tanto, si llamamos N_h al número de pares de datos separados por la distancia $\mathbf{h}_i \in (\mathbf{h} \pm \varepsilon(\mathbf{h}))$, usada en lugar de la distancia estricta del modelo teórico $\mathbf{h}$, no se está estimando $\gamma(\mathbf{h})$ sino la combinación lineal

$$\frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \gamma(\mathbf{h}_i) \quad (22)$$

El efecto es un suavizado del semivariograma experimental que decrece según $\varepsilon(\mathbf{h})$ va siendo más pequeña respecto al alcance del modelo teórico que queremos estimar.

El problema se centra ahora en una elección adecuada de h y $\varepsilon(h)$. Aunque no hay unas normas fijas a seguir en cuanto a la tolerancia $\varepsilon(h)$ caben dos estrategias:

- considerar $\varepsilon(h) = \text{constante}$ para todas las clases de distancias.
- o bien considerar valores pequeños de la tolerancia $\varepsilon(h)$ para valores pequeños de h y valores grandes de la misma para valores grandes del paso.

Conviene sin embargo en la práctica tener en cuenta una serie de circunstancias:

- tratar de definir $\varepsilon(h)$ teniendo en cuenta las pseudoperiodicidades de los datos.
- utilizar una distribución de clases de distancias de manera que la zona de influencia del semivariograma aparezca reflejada al menos en 3 ó 4 de dichas clases, siendo $\varepsilon(h)$ no demasiado grande.
- asegurar que el intervalo $(h \pm \varepsilon(h))$ contenga suficientes pares de datos.

5.5.2. Dominio bidimensional

En este caso el vector $\mathbf{h}$ viene definido por su módulo $\|\mathbf{h}\|$ y su dirección α y el semivariograma experimental deberá ser calculado para diferentes direcciones de $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma^*(\mathbf{h}, \alpha) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad (23)$$

En el caso bidimensional se trabaja en coordenadas polares, definiendo una tolerancia $\varepsilon(h)$ para $\|\mathbf{h}\|$, así como una tolerancia $d\alpha$ para la dirección α considerada. De esta forma se calcula el semivariograma experimental para todos los pares de puntos situados en el recinto delimitado por las rectas que forman un ángulo $d\alpha$, cuya bisectriz es la recta de pendiente $\tan(\alpha)$ y por las circunferencias de radios respectivos $(h - \varepsilon(h))$ y $(h + \varepsilon(h))$. Dado que la dimensión de los soportes elementales crece de manera ilimitada según aumenta h se suele imponer un parámetro de ancho de banda (*bandwidth*) para limitar dicho crecimiento (figura 8).

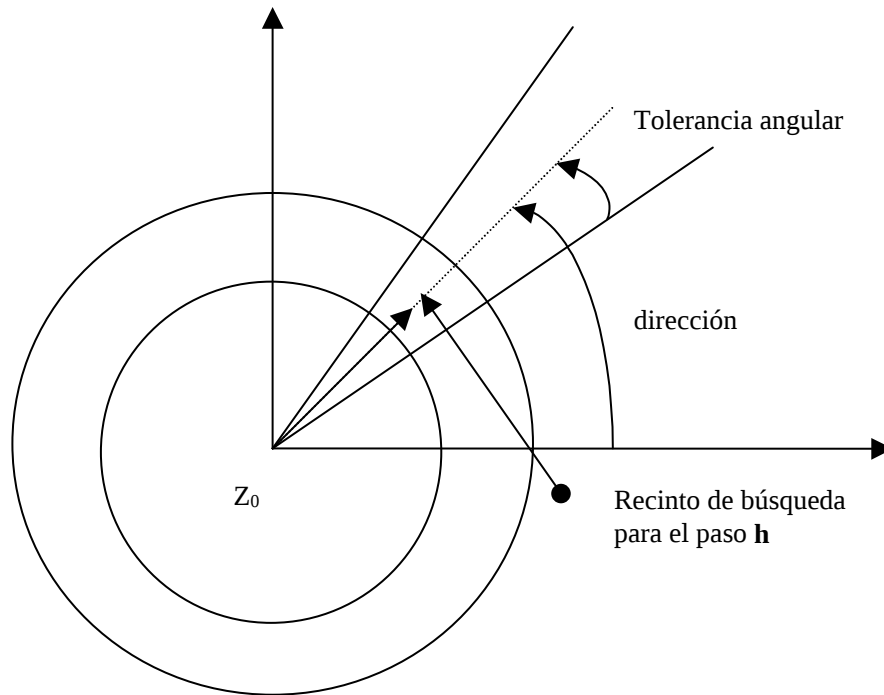


Figura 8: Algoritmo de inferencia del variograma experimental en el caso de una V.R. bidimensional.

En este caso tampoco es posible dar normas para una correcta elección de los parámetros que definen los soportes, aunque como siempre, deben ser tales que aseguren un número suficiente de pares de datos en su interior. Igualmente, debe considerarse también, que cuanto mayores sean las dimensiones del soporte, mayor es el efecto de suavizado introducido en el semivariograma experimental. Si no se sospecha la existencia de alguna dirección preferencial, se calcula el variograma para cuatro o seis direcciones de $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo se podría tomar: $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$). Cuando se sospecha la existencia de una anisotropía en una determinada dirección α_0 se define un valor pequeño de la tolerancia $d\alpha_0$ para el análisis del variograma en esa dirección, dado que si se aumenta mucho la tolerancia angular se produce un crecimiento artificial de la dirección de mínimo alcance.

5.5.3. Dominio tridimensional

En el caso de un dominio tridimensional los razonamientos son análogos pero se trabaja en coordenadas esféricas, con lo cual es necesario la definición de dos tolerancias angulares, una para la longitud y otra para la latitud, y una tolerancia espacial, definiendo de este modo un volumen elemental de captura de parejas de puntos.

5.6. Ajuste del variograma experimental

Debido a que el semivariograma experimental es inmanejable en la práctica, pues no se posee una fórmula analítica del mismo, ni verifica las propiedades que necesariamente debe cumplir un modelo teórico de semivariograma, se procede al ajuste del mismo mediante unos modelos teóricos que poseen una expresión matemática manejable y que cumplen dichas restricciones. La elección de un modelo de semivariograma debe estar respaldado por las conclusiones que se puedan extraer de un profundo conocimiento físico del fenómeno estudiado. Por ejemplo en yacimientos de tipo sedimentario como

las capas de carbón se suele esperar un comportamiento esférico isótropo y sólo en casos de extrema suavidad sería aconsejable utilizar un modelo gaussiano.

5.7. Las estructuras anidadas y el efecto pepita

El semivariograma experimental es una superposición de las distintas escalas de variabilidad espacial del fenómeno objeto de nuestro estudio, por lo que resultará especialmente interesante interpretar el comportamiento del mismo con $h \rightarrow 0$, i.e., en el origen (a la escala de observación más pequeña que nos permiten los datos) donde las variables superpuestas están fuertemente correlacionadas, y con $h \rightarrow \infty$, i.e., en el infinito (a gran escala) donde la correlación entre las variables desaparece. Ambos aspectos nos pueden indicar la conveniencia de aumentar o disminuir la escala de observación según nos interese.

5.7.1. Estructuras superpuestas o anidadas

Consideremos dos realizaciones de la función aleatoria Z en distintos puntos de su soporte separados por el vector h , tales como $Z(x)$ y $Z(x+h)$. La variabilidad del fenómeno entre ambos valores, que se caracteriza mediante el semivariograma, se debe a multitud de escalas de variabilidad que se manifiestan simultáneamente para cualquier vector h considerado y se denominan *estructuras superpuestas*. Cada escala de variabilidad integra las variabilidades de escalas menores. En la práctica, todas estas escalas de variabilidad no se observan nunca simultáneamente, ya que esto requeriría una enorme cantidad de datos.

En cuanto a los momentos de segundo orden de la función aleatoria Z , estas estructuras superpuestas que constituyen la estructura global del fenómeno, se pueden representar mediante la suma de un cierto número de semivariogramas (o covarianzas), cada uno de los cuales caracteriza una escala de variabilidad

$$\gamma(h) = \gamma_0(h) + \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_n(h) \quad (24)$$

Esta igualdad funcional conlleva que la variabilidad de cada escala de observación sea independiente de las demás, que es lo que nos permite descomponer la función aleatoria Z como suma de variables independientes en virtud de (??).

La principal diferencia entre el variograma teórico y el experimental es la presencia en éste último del efecto pepita, que como vimos se puede interpretar como las escalas de variabilidad no observables a la escala de muestreo. Cabe reseñar que cuando interpretamos un variograma con un efecto pepita, éste último ya es una estructura espacial autónoma y estamos asumiendo el modelo de estructuras anidadas.

En la génesis del efecto pepita también confluyen otros factores como **el efecto de los errores de medida**. Efectivamente, supongamos que las medidas tienen unos errores que consideramos realizaciones de una cierta variable aleatoria $\varepsilon(x)$. Sea $Z(x)$ el valor real de la F.A., y sea $Z_1(x)$ el valor medido, de forma que

$$Z_1(x) = Z(x) + \varepsilon(x) \quad (25)$$

Esta expresión es un anidamiento de estructuras, por lo que suponiendo su independencia llegamos a que

$$\gamma_{Z_1}(h) = \gamma_{Z_1}(h) + \gamma_\varepsilon(h) \quad (26)$$

Si además suponemos además que los errores carecen de correlación espacial, y tienen una varianza constante σ_ε^2 , obtenemos que

$$\gamma_{Z_1}(h) = \gamma_{Z_1}(h) + \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{para } h \neq 0 \quad (27)$$

i.e., los datos introducen un efecto pepita de valor σ_ε^2 independientemente del que pueda presentar Z .

Cuasiestacionariedad y efecto proporcional Sea una función aleatoria Z cuasiestacionaria. Se ha comprobado experimentalmente que a menudo dados dos semivariogramas experimentales $\gamma^*(x_0, h)$ y $\gamma^*(x'_0, h)$, calculados en distintos subdominios $V(x_0)$ y $V(x'_0)$, aunque sean diferentes pueden hacerse coincidir multiplicándolos por un factor que es función de las medias experimentales $m^*(x_0)$ y $m^*(x'_0)$ de los datos disponibles en cada subdominio. Esto equivale a asumir que existe un modelo estacionario $\gamma_0(h)$ independiente del dominio, lo que nos permite trabajar con una única característica estructural aplicable a todos los subdominios de cuasiestacionariedad. Esta se corrige dentro de cada subdominio, de tal forma que

$$\gamma(h, x_0) = f[m^*(x_0)] \cdot \gamma_0(h) \quad (28)$$

por tanto, considerando $V(x_0)$ y $V(x'_0)$

$$\frac{\gamma(h, x_0)}{f[m^*(x_0)]} = \frac{\gamma(h, x'_0)}{f[m^*(x'_0)]} \Rightarrow \gamma(h, x_0) = \frac{f[m^*(x_0)]}{f[m^*(x'_0)]} \gamma(h, x'_0),$$

donde $m^*(x_0)$ es un estimador de la esperanza $E[Z(x_0)]$, que es constante en cada subdominio $V(x_0)$. La forma de la función f se determina estudiando las relaciones de proporcionalidad existente entre los semivariogramas $\gamma^*(x_0, h)$, $\gamma^*(x'_0, h)$ correspondientes a cada subdominio de cuasiestacionariedad. Se dice entonces que los modelos $\gamma(h, x_0)$ y $\gamma(h, x'_0)$ difieren uno de otro debido a un *efecto proporcional*. El efecto proporcional también afecta a parámetros geoestadísticos tales como la varianza de estimación que dependen linealmente del semivariograma.

El efecto proporcional se denomina *directo* si las mesetas de los semivariogramas experimentales aumentan al aumentar la correspondiente media experimental. En caso contrario se denomina *inverso*.

Muy a menudo, en las aplicaciones mineras, el efecto proporcional es una función de m^2 . Esta propiedad de efecto proporcional se utiliza para diseñar como otros descriptores espaciales distintos al semivariograma, los semivariogramas relativos, que al discretizar el dominio de la regionalización perciben mejor pequeñas las variaciones locales de la regionalización.

Cuando están presentes estructuras anidadas, el efecto proporcional puede ser diferente para cada una de las subestructuras, i.e., la función $f_i[m^*(x_0)]$ puede ser diferente para cada uno de los modelos γ_i . En definitiva, el efecto proporcional se puede interpretar como un efecto de no estacionariedad de la función aleatoria $Z(x)$ que es solamente estacionaria localmente o cuasiestacionaria.

5.8. Herramientas del análisis estructural

5.8.1. Información adicional en el análisis estructural

Además, junto al variograma experimental $\gamma^*(h, \alpha)$ se adjunta una serie de información adicional muy importante a la hora de realizar su interpretación:

1. **El número de pares de datos** utilizados en el cálculo de $\gamma^*(h, \alpha)$. El estudio de dicha curva suele indicar la presencia en el semivariograma experimental de efectos no estacionarios inducidos por una falta de datos y no debidos por tanto a una característica estructural de la variable regionalizada. Además dicha información es necesaria cuando se agrupan varios semivariogramas para dar lugar a un semivariograma medio:

$$\gamma^*(h) = \frac{\sum_k N_k(h) \gamma_k^*(h)}{2 \sum_k N_k(h)} \quad (29)$$

2. También se suelen proporcionar las **curvas** $m_{-h}, m_{+h}, \sigma_{-h}$ y σ_{+h} de las medias y desviaciones típicas de los datos que en cada paso h contribuyen al cálculo del semivariograma (los valores de cabeza $Z(x_i + h)$ y los valores de cola $Z(x_i)$)

$$\begin{aligned} m_{+h} &= \frac{1}{N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} Z(x_j + h), & \sigma_{+h} &= \frac{1}{N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} Z^2(x_j + h) - m_{+h}^2, \\ m_{-h} &= \frac{1}{N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} Z(x_j), & \sigma_{-h} &= \frac{1}{N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} Z^2(x_j) - m_{-h}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Gracias a estas curvas es posible determinar la presencia de efectos no estacionarios.

La *figura 9* muestra el variograma de una variable no estacionaria y la información adicional comentada anteriormente. En este caso cabe asegurar la existencia de un fenómeno no estacionario dado que:

- aunque el número de pares de puntos disminuye con la distancia, las curvas de medias y varianzas locales muestran fluctuaciones en función del paso.
- el conocimiento del fenómeno analizado, en este caso se trata de la cota del muro de una capa de carbón con buzamiento, permite asegurar la génesis de dicho fenómeno.

Estas curvas pueden ser interpretadas para obtener una idea sobre la talla del recinto de cuasi-estacionariedad que se debe adoptar, dado que para valores del paso menores a tres unidades de paso (en torno a 250 metros) la media puede ser aproximada por un valor constante.

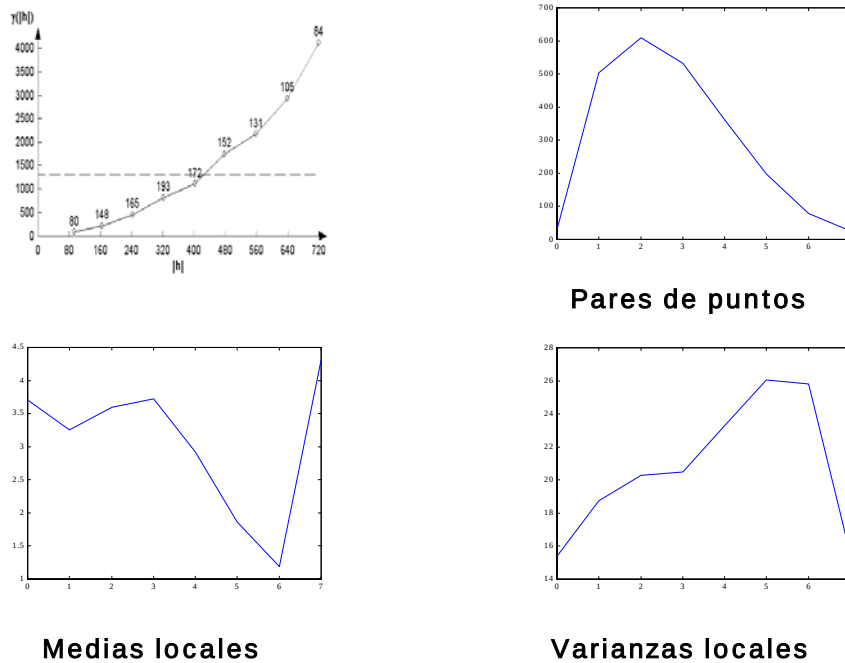


Figura 9: Información adicional en un análisis variográfico.

5.8.2. Los diagramas de dispersión. Interpretación del semivariograma experimental

Los diagramas de dispersión son un medio eficaz para controlar gráficamente la evolución en el espacio de la continuidad de la estructura espacial del fenómeno estudiado y realizar un control de calidad en la inferencia del semivariograma experimental. Consiste en representar para cada paso $\mathbf{h}$ las realizaciones de la función aleatoria Z en los puntos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ que contribuyen al cálculo del $\gamma(\mathbf{h})$. La mayor o menor dependencia espacial entre las variables aleatorias $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y $Z(\mathbf{x})$ se puede caracterizar mediante el grado de ajuste del diagrama de dispersión a la bisectriz del primer cuadrante. El semivariograma experimental $\gamma(\mathbf{h})$ coincide con el momento de inercia respecto a dicha recta del diagrama de dispersión para el paso $\mathbf{h}$ (figura 10):

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}_i))^2. \quad (31)$$

Esta interpretación del semivariograma nos proporciona un buen criterio para descartar valores experimentales de Z que se alejan mucho de los valores centrales de la distribución de los datos, y por tanto, demasiado alejados de la recta a 45° . Dichos datos (*outliers*) contribuyen mucho a $\gamma(\mathbf{h})$ y pueden darnos una visión errónea sobre la regularidad espacial de la regionalización. En estos casos, habrá que estudiar la conveniencia de prescindir de estos datos para el cálculo del semivariograma experimental correspondiente a cada valor concreto de h .

Los diagramas de dispersión sirven para comprobar diferentes hipótesis geostatísticas:

- Si la F.A. es Gaussiana los diagramas de dispersión son nubes de puntos de forma elíptica con una mayor densidad de puntos en el centro de la distribución.
- En el caso en que la F.A. sea no estacionaria se observa un desplazamiento sistemático de la nube de puntos a uno u otro lado del eje de inercia, para valores sucesivos del paso.
- Constituyen un método efectivo para realizar gráficamente la separación de poblaciones presentes en la función aleatoria Z y que poseen diferentes modelos de variabilidad espacial.

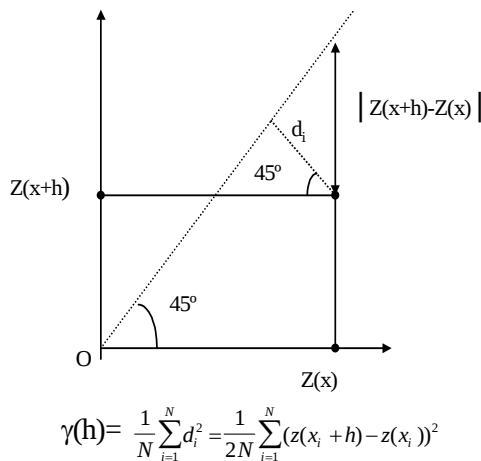


Figura 10: a. El diagrama de dispersión y su relación con el semivariograma experimental. b. Diagrama de dispersión de una F.A. no estacionaria.

5.8.3. El variograma de superficie o variograma exhaustivo

El variograma exhaustivo o de superficie es la superficie que se obtiene al representar los variogramas direccionales en las diferentes direcciones del espacio. De esta manera el variograma en la

dirección α se obtiene al seccionar el variograma de superficie por el plano de perfil que pasa por el origen y posee como traza la recta que forma α° (en sentido antihorario) con el origen de ángulos (normalmente la dirección este). Dicho mapa proporciona una visión rápida de la estructura espacial, dado que las F.A. estarán altamente correladas para valores pequeños (frecuentemente señalados en azul) del variograma de superficie.

El variograma de superficie se obtiene mediante un algoritmo numérico que consiste en discretizar el espacio en diferentes celdas fijando los pasos según los ejes coordenados $[h_x, h_y]$. La celda (h_x, h_y) contiene el valor del variograma $\gamma(\mathbf{h})$ donde $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$. La celda central corresponde al vector de separación $(0, 0)$ y contiene el valor del variograma calculado con todas las parejas de valores que están a distancia nula (cero en ausencia de pepita). Dado que el variograma teórico es una función par, $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(-\mathbf{h})$, la superficie del variograma posee una simetría respecto al origen de coordenadas. En el caso en que la F.A. sea isótropa el alcance es independiente de la dirección y las curvas de nivel del variograma de superficie serán circunferencias. Si la F.A. es anisótropa elíptica, entonces las curvas de nivel del variograma de superficie serán elipses. Es por lo tanto un medio eficaz para detectar las direcciones principales de anisotropía y diseñar el cálculo de los variogramas direccionales (figura 9).

a) V.R. isótropa.

Figura 9: El variograma exhaustivo como herramienta estructural.

5.8.4. El variograma omnidireccional

Es el variograma medio que se obtiene fijando un parámetro de tolerancia angular de 90° , es decir, promediando los variogramas direccionales del abanico angular $[0^\circ, 180^\circ]$. Se trata de un variograma suave que hereda las diferentes características presentes en los variogramas direccionales (efectos de agujero, no estacionariedades, anidamiento de estructuras, etc...).

Es aconsejable inferirlo antes del análisis unidireccional dado que ayuda a diseñar el estudio variográfico (paso mínimo, número de pasos, tolerancias, etc...). En ausencia de un número suficiente de datos sería el modelo estructural isótropo que se adopta en las fases posteriores de krigeado y/o simulación condicional.

5.8.5. La nube del variograma

La nube del variograma consiste en representar para cada paso h el valor de

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{(Z_{\alpha} - Z_{\beta})^2}{2},$$

para toda pareja de datos Z_{α}, Z_{β} pertenecientes a la clase de distancia h . Se obtiene así una nube de puntos de tal forma que el promedio de los valores que se encuentran en una misma vertical (paso h) es por definición el valor del variograma $\gamma(h)$. Constituye un control de calidad en la inferencia del variograma experimental dado que permite visualizar los valores que contribuyen en su cálculo para las distintas clases de distancias (*figura 10*). Este control de calidad posee gran importancia dado que como hemos explicado el variograma es muy sensible a los valores anómalos de la V.R.

Figura10: Variograma experimental y la nube del variograma asociado. Se observa como la mayoría de puntos de la nube del variograma delimitan el variograma experimental. En este caso también se observa la importancia de los valores anómalos para las grandes distancias. Esta herramienta puede servir por ejemplo para juzgar si el efecto de agujero observado en el variograma experimental es real, lo cual posee importantes repercusiones, por ejemplo geológicas.

5.8.6. Otros descriptores espaciales

Como hemos visto el semivariograma es muy sensible respecto a los valores erráticos de la variable, por lo que en caso de aparecer éstos, puede presentar fluctuaciones. Indicamos entonces, que una posible solución que nos permita una ver imagen clara de la estructura espacial de la regionalización, i.e., es un filtrado de datos para localizarlos y eliminarlos si se estima conveniente. Otra solución, consiste en utilizar otros descriptores espaciales de la regionalización que sean menos sensibles a estos valores extremos de la variable, aunque en la práctica se realizan ambas cosas simultáneamente.

El objetivo de dichos descriptores es contribuir a realizar una mejor caracterización de la estructura espacial. Las ideas que subyacen en su definición son las siguientes:

1. bien describir la estructura espacial mediante medidas relacionadas con el semivariograma (co-varianza y correlograma),
2. bien cambiar la norma asociada a la inferencia del semivariograma (rodograma, madograma) o modificar no linealmente la variable (variograma de los logaritmos y variograma de variables indicadoras), para paliar el efecto de los valores anómalos,
3. bien estandarizar los variogramas para evitar el efecto de los valores anómalos y de los fenómenos de deriva.

Entre ellos, los más utilizados son los siguientes:

1. *Semivariograma de los logaritmos* $[\gamma_L(h)]$:

$$\gamma_L(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(h)} \{(\ln[Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})] - \ln[Z(\mathbf{x}_i)])\}^2 \quad (32)$$

2. *Semivariograma indicador* $[\gamma_I(h)]$:

$$\gamma_I(\mathbf{h}, c) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(h)} \{I[Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}, c)] - I[Z(\mathbf{x}_i, c)]\}^2, \quad (33)$$

donde $I(x, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) \leq c, \\ 0 & \text{si } Z(x) > c. \end{cases}$ Evidentemente existe un variograma indicador para cada ley de corte c .

3. *Semirotograma* $[\gamma_R(h)]$:

$$\gamma_R(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(h)} \sqrt{|Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}_i)|} \quad (34)$$

4. *Semimadograma* $[\gamma_M(h)]$:

$$\gamma_M(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(h)} |Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}_i)| \quad (35)$$

El semimadograma y el semirotograma se utilizan especialmente para establecer los parámetros (alcance y anisotropías) de la estructura a gran escala; son poco útiles para analizar el comportamiento de la regionalización a pequeña escala.

5. *El semivariograma estándar* $[\gamma_S(h)]$:

$$\gamma_{LR}(h) = \frac{\gamma(h)}{\sigma_{-h}\sigma_{+h}} \quad (36)$$

Este descriptor escala el variograma por la varianza relativa a cada paso $\sigma_{-h}\sigma_{+h}$ y toma en cuenta posibles variabilidades locales de los datos.

6. *Semivariograma relativo local* $[\gamma_{LR}(h)]$:

$$\gamma_{LR}(h) = \frac{\sum_{i=1}^n N_i(h) \frac{\gamma_i(h)}{m_i^2}}{\sum_{i=1}^n N_i(h)} \quad (37)$$

donde $\gamma_1(h), \dots, \gamma_n(h)$, son los semivariogramas correspondientes a cada uno de las n regiones; $m_1, \dots, m_n$, las medias locales en cada una de las mismas; y $N_1(h), \dots, N_n(h)$ es el número de pares de puntos utilizados para el cálculo del semivariograma experimental en cada región. En este caso se supone que el semivariograma presenta un efecto proporcional en el que el factor de proporcionalidad es el cuadrado de la media local. El principal inconveniente en la utilización

del semivariograma relativo local es precisamente la discretización del dominio de Z , que hace que las poblaciones de datos de cada región se traten de forma independiente: en caso de pocos datos para el cálculo del semivariograma experimental de cada región éstos pueden ser erráticos.

Una manera de solventar este problema es utilizar el semivariograma relativo general, que definimos a continuación.

7. *Semivariograma relativo general* $[\gamma_{GR}(h)]$:

$$\gamma_{GR}(h) = \frac{\gamma(h)}{\left(\frac{m_{+h} + m_{-h}}{2}\right)^2}. \quad (38)$$

8. *Semivariograma relativo de pares de puntos* $[\gamma_{PR}(h)]$

Al igual que los anteriores ajusta el semivariograma mediante el cuadrado de la media. En este caso, tal ajuste se realiza separadamente para par de puntos, utilizando su promedio como media local

$$\gamma_{PR}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_i \frac{[Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2}{\left(\frac{[Z(x_i + h) + Z(x_i)]}{2}\right)^2} \quad (39)$$

El uso de los semivariogramas relativos se suele limitar al caso de variables positivas para evitar problemas de indeterminación. Se trata de variogramas muy resistentes al efecto de los valores anómalos y a variaciones locales de las propiedades estadísticas del fenómeno. A veces sirven para detectar estructuras o anisotropías que no pueden ser caracterizadas con otros descriptores espaciales.

En definitiva es una buena norma el considerar diferentes descriptores espaciales cara al análisis estructural de una V.R. dado que el semivariograma es un descriptor poco robusto. Siempre se debe adoptar el descriptor que mejor revele la estructura espacial del fenómeno, dado que frecuentemente se suele enmascarar la estructura espacial debido a una mala elección del paso del variograma, de las tolerancias angulares o a la presencia de valores anómalos. Algunas de estas circunstancias están reflejadas en la bibliografía, por ejemplo:

- aumentando mucho el paso h suele dar lugar a variogramas con efectos pepita muy pronunciados (sobrestimados),
- en el caso de V.R. anisótropas elípticas, adoptando tolerancias angulares grandes se disminuye el ratio de anisotropía.

En definitiva es importante desenmascarar la estructura subyacente del fenómeno estudiado mediante una análisis estructural bien diseñado, dado que sólo en muy contadas ocasiones se infiere una estructura espacial inexistente.

5.9. Algunas recomendaciones prácticas

El análisis estructural es posiblemente la fase más decisiva de todo proyecto geoestadístico, dado que en se infiere el modelo de covarianzas (modelo de similitud espacial) del fenómeno regionalizado. Al ser una fase puramente en la que la modelización adquiere su grado más puro, se entremezclan conceptos provenientes del conocimiento (de la ciencia), con conceptos provenientes del arte (siempre se debe de asumir un cierto grado de subjetividad en toda modelización). Cabe citar la famosa frase que a mi entender zanja de modo magistral este tema: "Los modelos son para ser usados, no para ser creídos".

A modo de generalidad se pueden dar las siguientes recomendaciones:

- Un buen conocimiento previo del fenómeno regionalizado es esencial para la toma de decisiones adecuadas en la fase de análisis estructural. Así por ejemplo en minería se sabe que:
 - cuando se trabaja con variables de tipo potencia, suelen poseer variogramas de tipo lineal, con un grado de regularidad alta (de tipo esférico, alcances decamétricos y pepitas pequeñas). Además suele tratarse de fenómenos isotrópicos al corresponder a fenómenos sedimentarios en los que las no suele haber direcciones preferenciales de aporte de sedimentos.
 - cuando la variable analizada es de calidad (contenido en azufre, poder calorífico, cenizas, contenido en volátiles) son esperables comportamientos lineales con un menor grado de regularidad (variogramas exponenciales de menores alcances y efectos pepita quem suelen exceder el 50 % de la variabilidad estadística). También es muy normal encontrar efectos de agujero que se deben a la intercalación de zonas ricas y pobres, e incluso efectos no estacionarios, principalmente debidos a variaciones locales de la media.

Un buen conocimiento geológico en temas de geoestadística minera es por lo tanto primordial (tipo de yacimiento, presencia de facies diferentes, irregularidades, accidentes tectónicos, etc).

- Un buen conocimiento de la posición espacial de los datos es importante para la adopción de los parámetros de inferencia del semivariograma experimental: tamaño de paso, estudio direccional y tolerancias angulares. Una práctica muy usual es examinar el mapa de datos (sondeos) agrupando éstos en clases de valores. Esto permite examinar la variabilidad del fenómeno y la detección de discontinuidades, tendencias o valores anómalos, previamente a la fase de análisis estructural.
- Dado que el variograma es muy sensible a la presencia de valores anómalos es recomendable examinar más de un descriptor espacial, por ejemplo el variograma, el correlogram y el mado-grama. Si todos estos descriptores poseen la misma apariencia (recordar que sólo en el caso del variograma la meseta coincide con la varianza de la función aleatoria) el análisis estructural puede ser completado. Si existen diferencias importantes, se debe intentar justificar su origen. Un buen medio es el uso de los diagramas de información estructural expuestos con anterioridad. Si la diferencia se debiese a la presencia de valores anómalos algunos programas (como Variowin 2D) permite enmascarar dichos datos en la fase de análisis estructural. Las parejas anómalas se detectan muy bien en los diagramas de dispersión para los diferentes pasos (puntos más alejados de la diagonal) o en la nube del variograma (parejas con diferencias cuadráticas más elevadas). Otra opción es utilizar descriptores menos sensibles a los valores anómalos, como el madrograma o el rodograma (Variowin 2D sólo incluye el madrograma) . Si las diferencias fuesen debidas a variaciones locales de la media en este caso se deben utilizar los variogramas relativos (Variowin 2D incluye el variograma estándar).
- Siempre se debe de adoptar el descriptor espacial que mejor caracterice la continuidad espacial. La razón no es otra que si la estructura espacial existe y los datos son suficientes, ésta se debe detectar y es muy improbable detectar una continuidad espacial que no existe. No obstante se debe de tener presente los siguientes puntos:
 - a veces la estructura espacial puede quedar enmascarada por una mala elección de los parámetros de cálculo del semivariograma experimental: paso, tolerancia de paso, direcciones y tolerancia angular. Dado que el comportamiento en el origen es el parámetro del variograma que más afecta al tipo de fenómeno estudiado, el variograma debe calcularse con diferentes pasos y adoptar el paso más pequeño que mejor caracteriza la estructura espacial (debe de haber un número suficiente de pares de datos). Es importante que reseñar que cuando se adoptan tamaños de paso grandes (con respecto a la longitud de onda del fenómeno espacial) el efecto resultante es un aumento considerable de la pepita.

- Cuando los datos son dispersos y escasos es práctica común aumentar la tolerancia angular para aumentar el número de pares de datos en el algoritmo de captura y producir variogramas medios más estables. Esta práctica no presenta mayores problemas cuando el fenómeno es isótropo o débilmente anisótropo (elipses de anisotropía poco achatadas). En el caso de anisotropías severas el aumento de la tolerancia angular suele conducir a una subestimación del ratio de anisotropía en el siguiente sentido: la dirección de máximo alcance se subestima y la de mínimo alcance se sobreestima. Se debe entonces utilizar la mínima tolerancia angular para caracterizar los variogramas, y si el fenómeno es fuertemente anisótropo se podría aumentar artificialmente el ratio de anisotropía. Un caso extremo se produce cuando existen muy pocos datos y muy dispersos. En este caso no cabe otro remedio que adoptar como descriptor espacial el modelo isótropo deducido del variograma omnidireccional, aunque hay que tener en cuenta que el fenómeno posiblemente sea anisótropo y por lo tanto el alcance de dicho variograma será un "promedio" de los alcances de la elipse de anisotropía.
- Cuando los datos aparecen agrupados, hay que tener especial cuidado en el análisis estructural, dado que pueden aparecer artefactos como el comentado anteriormente para el ratio de anisotropía.
- En el ajuste de los variogramas experimentales siempre se plantea la pregunta: ¿cuántas estructuras anidadas es preciso utilizar?. La respuesta es clara: durante la fase de análisis estructural se debe evitar un "sobreajuste" del variograma experimental, dado que su objetivo es detectar las principales características del fenómeno regionalizado, no modelizar todos los "pequeños" detalles del variograma experimental. Cuando varios modelos de variograma proporcionan un ajuste similar, se debe adoptar el más sencillo, es decir el que menor número de estructuras anidadas posea y que corresponda a nuestro saber cualitativo. Modelos de variograma muy sofisticados no proporcionan obligatoriamente las mejores estimaciones.
- En cuanto al ajuste de los diferentes parámetros del variograma cabe tener en cuenta que:
 - El efecto pepita tiene en cuenta las microvariabilidades no observables a la escala de muestreo y los errores en las medidas.
 - La meseta del semivariograma, cuando existe, no suele ser nunca igual a la varianza muestral.
 - El alcance suele detectarse fácilmente, aunque en ocasiones puede ser enmascarado por valores anómalos o insuficientes.
 - Para decidir si un fenómeno regionalizado es isótropo o anisótropo una herramienta óptima es el variograma de superficie. Sin embargo cuando los datos son escasos y dispersos se necesitan tolerancias (tanto de paso como angulares) amplias, con lo que se reduce drásticamente la resolución de dicho mapa. En cualquier caso toda anisotropía que no está clara o no puede ser explicada por razonamientos de tipo cualitativo (geológico, etc) es mejor ignorarla. Inversamente un buen conocimiento cualitativo del fenómeno puede dar lugar a la adopción de un modelo de covarianzas anisótropo, aunque los datos no refrenden este comportamiento.
- Los variogramas gaussianos (y de comportamiento parabólico en general) corresponden a una variable casi de tipo determinista, y sólo deben de ser ajustados en el caso de que el fenómeno sea altamente regular. Además se sabe que los variogramas gaussianos sin efecto pepita provocan artefactos e inestabilidades numéricas en el krigado. Por eso se suelen combinar con un pequeño efecto pepita o utilizar en su lugar un variograma monómico de potencia dos.
- Finalmente el modelo adoptado puede ser confirmado, como veremos posteriormente, por técnicas de crossvalidación. No obstante los programas hoy en día proporcionan herramientas de ayuda a la decisión. En este manuscrito se recomienda seguir las siguientes etapas:

- cálculo y ajuste del variograma omnidireccional, para diseño de los parámetros del estudio variográfico direccional.
- Cálculo del variograma de superficie para el diseño del estudio variográfico direccional: determinación de las direcciones preferentes de análisis.
- Estudio variográfico direccional, utilizando los diagramas de dispersión para detección de datos anómalos, las nubes del variograma para detección de alcances y mesetas direccionales en caso de duda, y utilización de otros descriptores espaciales.
- Ajuste de los variogramas direccionales teniendo en cuenta el conocimiento cualitativo del fenómeno y los índices de bondad de ajuste proporcionados por los programas de análisis estructural.

6. Krigeado o estimación

6.1. Introducción

El problema general de la estimación puede plantearse de la siguiente manera: dada una F.A. $Z(x)$ que toma valores en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y de la cual se conoce el vector aleatorio $\{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)\}$, se trata de estimar Z en un punto x_0 arbitrario del dominio de $Z(x)$. Hay que tener en cuenta que la fiabilidad de nuestro interpolador va a depender de la cantidad y calidad de la información de la que se disponga alrededor del punto x_0 a estimar.

Algunas propiedades que parecen deseables para nuestro estimador serían:

1. **Exactitud:** el mapa de valores estimados debe "pasar" por los puntos de medida

$$Z^*(x_i) = Z(x_\alpha) \quad (\alpha = 1, n).$$

1. **Estabilidad** con el fin de pequeñas perturbaciones en los datos no originen grandes modificaciones en los mapas de valores estimados.
2. **Sencillez:** el estimador debe depender de una manera simple de los datos⁹, por ejemplo, linealmente. Esto es conveniente a la hora de enjuiciar y criticar los resultados que dicho estimador proporciona.
3. **El interpolador debe tener en cuenta la correlación espacial del fenómeno.** En el caso lineal esto se traduce a la hora de asignar los pesos de estimación.
4. Suele ser conveniente que conserve ciertas características de la población que interpola. Por ejemplo que conserve la media poblacional. En este último caso el estimador se denomina **insesgado**.
6. Por último, es muy conveniente que el estimador permita el **cálculo de un mapa de errores**, i.e., la varianza del error de estimación en cada punto.

Existen diferentes métodos de estimación: interpoladores en función del inverso de una potencia de la distancia euclídea, método triangular, método de los polígonos de influencia, etc... Los estimadores geoestadísticos o de krigeado son mejores que los anteriores dado que cumplen todos los requisitos enunciados.

⁹Se sobreentiende la variable aleatoria que modeliza dicho dato.

6.2. Estimadores del inverso del cuadrado de la distancia

El estimador del inverso del cuadrado de la distancia es un estimador lineal de la forma:

$$Z^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(\mathbf{x}_{\alpha}), \quad (40)$$

donde los pesos λ_{α} son inversamente proporcionales a una potencia p (frecuentemente el cuadrado) de la distancia uclídea $d_{\alpha 0}$ entre el punto dato $\mathbf{x}_{\alpha}$ y el punto a estimar $\mathbf{x}_0$:

$$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{d_{\alpha 0}^p}, \quad (\alpha = 1, n). \quad (41)$$

Para que el estimador sea insesgado en el caso de que las v^s .a^s $Z(\mathbf{x}_{\alpha})$ posean todas la misma media m , se debe de verificar que $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$. Para ello los pesos se calculan según la regla (41) y posteriormente se normalizan según la expresión:

$$\lambda_{\alpha}^* = \frac{\lambda_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}}, \quad (\alpha = 1, n). \quad (42)$$

Observaciones:

- En este tipo de estimador no existe ninguna medida del error asociado a la estimación.
- No es un estimador exacto, pues si estimamos en un dato, la distancia del dato a sí mismo sería nula y el peso acordado sería infinito, es decir, este problema estaría mal planteado.
- Este estimador tampoco tiene en cuenta la estructura de correlación espacial de los datos, dado que las líneas de isopesos son circunferencias centradas en el punto de estimación. Además se trata de un estimador global dado que utiliza toda la información disponible. Esta última característica no es deseable cuando la F.A. posee variabilidades locales muy acentuadas, en cuyo caso el estimador produce un suavizado. Para intentar solventar estos dos inconvenientes se introduce el siguiente estimador local:

$$Z^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{\alpha \in B(\mathbf{x}_0)} \lambda_{\alpha} Z(\mathbf{x}_{\alpha}),$$

donde $B(\mathbf{x}_0)$ es una bola de centro $\mathbf{x}_0$ convenientemente elegida. La elección de dicha bola no es obvia dado que no se suele poseer un análisis estructural previo del fenómeno regionalizado. Si el fenómeno es isótropo, la bola sería un círculo y sólo habría que fijar su radio y como en el caso anterior las isolíneas de peso serían circunferencias, es decir, datos situados a igual distancia, poseerían la misma importancia (el mismo peso). Si el fenómeno fuese anisótropo, la bola sería una elipse de anisotropía y las isolíneas de peso serían elipses, es decir, en este caso un dato situado en el vértice del semieje mayor poseería un peso igual a un dato situado en el vértice del semieje menor pese a estar a mayor distancia.

- A veces se utilizan estimadores donde la potencia es mayor que dos. En este caso los pesos se diferencian más con la distancia y por lo tanto corresponde a fenómenos más regulares, dado que como veremos si no existe correlación espacial el mejor estimador es la media, y todos los pesos serían iguales.

6.3. Método triangular

El método triangular se suele utilizar cuando existe gran cantidad de datos. Consiste en construir triángulos que se apoyan en los datos, de forma que no sean degenerados (posean ángulos pequeños) y calcular el plano que pasa por los vértices del triángulo. Posteriormente, dado un punto de sondeo, se determina a qué triángulo pertenece y se adopta como valor estimado en ese punto la cota del plano interpolante. Se trata pues de un método de interpolación lineal que produce estimaciones continuas, dado que dos puntos adyacentes comparten un mismo lado del triángulo. Además es un estimador exacto, pero no proporciona ninguna medida sobre el error de la estimación. Este método no es adecuado cuando se posee una cantidad reducida de datos.

En el caso de que se desee estimar un punto donde no existen datos, se suele considerar el método triangular extendido que consiste en un método triangular para las interpolaciones al cual se añade una extrapolación por el método del inverso de la distancia para las extrapolaciones.

6.4. El kriging simple

El problema del kriging simple se aplica al caso de variables regionalizadas estacionarias con media y covarianza conocidas¹⁰. Se puede ver como una regresión lineal de $Z(\mathbf{x}_0)$ en función de los datos $Z(\mathbf{x}_\alpha)$, $(\alpha = 1, \dots, n)$. Dichas variables aleatorias poseen los siguientes momentos de primer y segundo orden:

1. sus medias $E(Z(x_\alpha)) = m \in \mathbb{R}$; $(\alpha = 0, \dots, n)$,
2. sus covarianzas $Cov(Z_\alpha, Z_\beta) = C_{\alpha\beta} = E(Z_\alpha Z_\beta) - m^2$.

6.4.1. Deducción de las ecuaciones de kriging simple

El estimador geoestadístico de kriging simple es:

$$Z_0^* = \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z(x_\alpha) \quad (43)$$

Imponiendo la condición de insesgado, se llega a:

$$E\{Z_0 - Z_0^*\} = m - \lambda_0 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha m = 0, \quad (44)$$

es decir:

$$\lambda_0 = m - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha m, \quad (45)$$

con lo que

$$Z_0^* = m + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (Z_\alpha - m) \Rightarrow Z_0^* - m = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (Z_\alpha - m). \quad (46)$$

Además calculando la esperanza en (43) y teniendo en cuenta (45) se llega a que $m = m^*$, con lo que introduciendo la variable residuo $Y(x) = Z(x) - m$ y teniendo en cuenta la linealidad del estimador, se llega a que Y_0^* es una combinación lineal de las variables aleatorias centradas Y_α :

$$Z_0^* - m = [Z_0 - m]^* = Y_0^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (Z_\alpha - m) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Y_\alpha. \quad (47)$$

¹⁰ Se trata como veremos de un problema académico dado que en la práctica la media no es conocida y el hecho de estimarla mediante la media muestral implica que el fenómeno no posee ninguna correlación espacial.

Para determinar los pesos λ_α basta imponer que el estimador sea el mejor en el sentido de minimización de la varianza del error de estimación. Veamos antes cómo calcular la varianza de dicho error. Teniendo en cuenta que

$$E = Z_0 - Z_0^* = Z_0 - m - [Z_0 - m]^* = Y_0 - Y_0^* = \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha Y_\alpha, \quad (48)$$

siendo:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_\alpha = -\lambda_\alpha. \end{cases}$$

La varianza de una combinación de variables aleatorias se escribe como vimos:

$$Var E = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n a_\alpha a_\beta C_{\alpha\beta}. \quad (49)$$

La condición necesaria de mínimo implica el cumplimiento de las n relaciones:

$$\frac{\partial Var E}{\partial a_\alpha} = \sum_{\beta=0}^n a_\beta C_{\alpha\beta} = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (50)$$

obteniendo el siguiente sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} = C_{\alpha 0}, \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (51)$$

Este sistema lineal recibe el nombre de *ecuaciones normales del kriging simple* y tiene solución única al coincidir la matriz del sistema con la matriz de covarianza de los datos y ser ésta definida positiva, luego invertible.

El estimador de kriging posee la propiedad de ser exacto en los puntos de muestreo, dado que si el punto a estimar $\mathbf{x}_0$ coincide con el dato $\mathbf{x}_\beta$, entonces la ecuación β del sistema de kriging simple se escribe:

$$\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} + \lambda_\beta C_{\alpha\beta} = C_{\beta\beta}, \quad (52)$$

con lo que $\lambda_\beta = 1$, $\lambda_{\alpha \neq \beta} = 0$ (por ser la solución única) y por lo tanto $Z_\beta^* = Z_\beta$.

La varianza del error de estimación viene dada en este caso por la expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_{KS}^2 &= Var \{Z_0 - Z_0^*\} = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n a_\alpha a_\beta C_{\alpha\beta} = C_{00} - \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{0\beta} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha C_{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta C_{\alpha\beta} = \\ &= C_{00} - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha C_{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} \right)}_{C_{\alpha 0}} = C_{00} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha C_{\alpha 0} \geq 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Resumen y observaciones

- El planteamiento del problema de kriging simple conduce a un sistema lineal que posee solución única (si no hay posiciones redundantes de los datos) dado la positividad de la matriz del sistema (matriz de covarianzas $C_{\alpha\beta}$).
- La hipótesis estacionaria conduce a poder estimar fácilmente los elementos de la matriz del sistema lineal como el vector segundo término, dado que $C_{\alpha\beta} = C(h_{\alpha\beta})$, $C_{\alpha 0} = C(h_{\alpha 0})$. Cabe reseñar que se trata de una hipótesis pragmática, pues de otra forma no sería posible calcular $C_{\alpha 0}$, es decir la similitud entre Z_α y Z_0 , al desconocerse el valor de éste.

- El sistema de krigado simple se puede expresar en función del semivariograma sin más que considerar que la igualdad fundamental $\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h})$.

6.4.2. Interpretación del krigado simple

Caso de independencia lineal de los datos

Supongamos $Z_\alpha, (\alpha = 1, \dots, n)$ un conjunto de datos independientes, entonces la matriz de covarianzas es diagonal y se escribe:

$$D = (C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \quad (54)$$

con lo que

$$\lambda_\alpha = \frac{C_{\alpha 0}}{C_{\alpha\alpha}}, (\alpha = 1, \dots, n). \quad (55)$$

Introduciendo el coeficiente de correlación entre las variables Z_α y Z_0

$$\rho_{\alpha 0} = \frac{C_{\alpha 0}}{\sqrt{C_{\alpha\alpha}C_{00}}}, \quad (56)$$

se tiene

$$\lambda_\alpha = \rho_{\alpha 0} \sqrt{\frac{C_{00}}{C_{\alpha\alpha}}}, \quad (57)$$

con lo que se llega a la siguiente expresión para el estimador:

$$[Z_0 - m]^* = \sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha 0} \sqrt{\frac{C_{00}}{C_{\alpha\alpha}}} (Z_\alpha - m),$$

es decir,

$$\frac{[Z_0 - m]^*}{\sigma_0} = \sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha 0} \frac{(Z_\alpha - m)}{\sigma_\alpha} \quad (58)$$

donde $\sigma_0 (\sqrt{C_{00}})$ y $\sigma_\alpha (\sqrt{C_{\alpha\alpha}})$ son las desviaciones típicas de las variables $Z_0, Z_\alpha, (\alpha = 0, \dots, n)$. Además, la varianza de estimación se escribe en este caso:

$$\sigma_{KS}^2 = C_{00} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha C_{\alpha 0} = C_{00} \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \frac{C_{\alpha 0}}{C_{00}} \right] = C_{00} \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha 0}^2 \right]$$

Observaciones

- La expresión (58) se denomina el plano de regresión de Z_0 en función de Z_α y proporciona una interpretación clara del sistema de krigado simple: *en el caso de independencia lineal de los datos, los pesos λ_α están relacionados con los coeficientes de correlación $\rho_{\alpha 0}$ entre cada dato Z_α y la variable a estimar Z_0 , de manera que cuanto mayor sea el coeficiente de correlación $\rho_{\alpha 0}$, mayor es el peso λ_α .*
- Si además los n datos son independientes de Z_0 (ninguna correlación espacial entre datos y entre datos e incógnita), entonces se verifica que $\rho_{\alpha 0} = 0, \forall \alpha$, con lo que $\sigma_{KS}^2 = \sigma_{00}'$ y $Z_0 = m$, es decir, *el mejor estimador geoestadístico es la media*. La comprensión de este resultado es de suma importancia, dado que se suele olvidar que cuando se adopta como estimador de una V.R. su media, se está asumiendo implícitamente que el fenómeno carece de correlación espacial. Por ejemplo, si el ingeniero de producción de una mina describe una capa de carbón de un

cierto yacimiento mediante su media y desviación típica, implícitamente está asumiendo para dicha capa un modelo estructural propio de un yacimiento altamente heterogéneo (yacimiento pepítico). Esta comparación es insensata, pues las capas de carbón suelen estar caracterizadas por modelos esféricos cuyo alcance suele ser decaimétrico, es decir, modelos propios de yacimientos más regulares como corresponde a su génesis sedimentaria.

- Si $n = 1$ entonces $\frac{[Z_0 - m]^*}{\sigma_0} = \rho_{10} \frac{(Z_1 - m)}{\sigma_1}$, es decir el estimador BLUE es la *recta de regresión*. Esta relación se generaliza al caso en el que se disponga de n datos, y por esa razón hablamos de una regresión n -variante.
- El krigeado simple guarda un gran paralelismo con los algoritmos comentados anteriormente del inverso del cuadrado de la distancia. En este caso los pesos no se asignan según la distancia euclídea existente entre dato e incógnita, sino que como vimos, en este caso la medida de similitud es estructural, dado que depende de las matrices de covarianza entre datos y entre datos e incógnita.

6.5. El krigeado ordinario

El krigeado ordinario se presenta cuando la media es estacionaria pero no se posee una estimación a priori de la misma. Desde el punto de vista estadístico corresponde a una regresión lineal con restricciones.

6.5.1. Deducción de las ecuaciones de krigeado ordinario

El estimador de krigeado ordinario es análogo al de krigeado simple:

$$Z_0^* = \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (59)$$

Para que éste sea insesgado debe de verificarse

$$E(Z_0^* - Z_0) = m - \lambda_0 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} m = 0 \quad \forall m. \quad (60)$$

Como la media m es desconocida, para ello es suficiente que los coeficientes satisfagan las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \lambda_0 &= 0 \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} &= 1 \end{cases} \Rightarrow Z_0^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (61)$$

La varianza del error de estimación se escribe:

$$\sigma_{ko}^2 = Var(Z(x_0) - Z^*(x_0)) = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n a_{\alpha} a_{\beta} C_{\alpha\beta}, \quad (62)$$

donde

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{\alpha} &= -\lambda_{\alpha} \end{cases} \quad (63)$$

El problema de krigeado ordinario corresponde a un problema de optimización con restricciones:

(KO) Hallar $\lambda = (\lambda_{\alpha})_{\alpha=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_{ko}^2(\lambda_{\alpha}) = \min$ con la condición $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$.

Para resolver dicho problema se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange. Construimos el funcional Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\lambda_\alpha; \mu) = \sigma_{ko}^2 + 2\mu \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha - 1 \right). \quad (64)$$

Las condiciones de optimalidad se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_\alpha} = \sum_{\beta=0}^n a_\beta C_{\alpha\beta} - \mu = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha - 1 = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Estas ecuaciones dan lugar al sistema lineal de ecuaciones normales del krigado ordinario:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} + \mu = C_{\alpha 0}, \alpha = 1, \dots, n, \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1. \end{cases} \quad (66)$$

Mediante un razonamiento análogo al caso del krigado simple, se demuestra que la varianza de estimación es en este caso se escribe:

$$\sigma_{ko}^2 = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n a_\alpha a_\beta C_{\alpha\beta} = \sigma_0 - \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C_{\alpha\beta} - \mu \quad (67)$$

Resumen y Observaciones

- El planteamiento del problema de krigado ordinario, al igual que en el caso del krigado conduce a un sistema lineal que posee solución única (si no hay posiciones redundantes de los datos) dado la positividad de la matriz de covarianzas $C_{\alpha\beta}$.
- Al igual que en el caso del krigado simple, la hipótesis estacionaria conduce a poder estimar fácilmente los elementos de la matriz del sistema lineal como el vector segundo término.
- Aunque aquí no se demuestra el krigado ordinario también se extiende al caso de las funciones intrínsecas y se expresa en este caso en función de los valores del variograma.
- Como en el caso del krigado simple, el krigado ordinario es exacto es decir la estimación "pasa" por los datos observados. La demostración es sencilla, pues si se verifica $Z(x_0) = Z(x_\alpha)$ entonces $C_{\alpha\beta} = C_{0\beta}$, $\forall \beta = 1, \dots, n$. Entonces teniendo en cuenta el sistema de krigado ordinario se tiene que $\lambda_\alpha = 1$, $\lambda_\beta = 0$ si $\beta \neq \alpha$. Además $\sigma_{ok}^2 = \sigma_0 - \lambda_\alpha \sigma_0 = 0$.

6.5.2. Interpretación del krigado ordinario

Caso de independencia lineal de los datos

Se puede analizar el caso particular en el que los datos son independientes y poseen igual varianza σ_0 . En este caso la matriz de covarianzas $C_{\alpha\beta}$ es diagonal con todos sus elementos iguales a σ_0 . El sistema de krigado, se escribe en este caso:

$$\begin{cases} \lambda_\alpha \sigma_0 + \mu = C_{\alpha 0}, \alpha = 1, \dots, n, \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1, \end{cases} \quad (68)$$

con lo cual:

$$\lambda_\alpha = \frac{C_{\alpha 0}}{\sigma_0} - \frac{\mu}{\sigma_0} = \rho_{\alpha 0} - \frac{\mu}{\sigma_0}. \quad (69)$$

Teniendo en cuenta la condición de sesgo nulo, se llega a la siguiente relación que proporciona el valor del multiplicador de Lagrange:

$$-\mu = \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \rho_{\alpha 0} \right] \frac{\sigma_0}{n}, \quad (70)$$

con lo que

$$\sigma_{ko}^2 = \sigma_0 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C_{\alpha 0} - \mu. \quad (71)$$

Si además los datos están incorrelados con la incógnita Z_0 , entonces $\rho_{\alpha 0} = 0$, $\alpha = (1, n)$, verificándose las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \mu &= -\frac{\sigma_0}{n}, \\ \lambda_{\alpha} &= -\frac{\mu}{\frac{\sigma_0}{n}} = \frac{1}{n}, \\ Z_0^* &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n Z(x_{\alpha}), \\ \sigma_{ko}^2 &= \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{n}. \end{cases} \quad (72)$$

es decir, en este caso (ausencia de correlación espacial) el mejor estimador es la media muestral.

Observaciones

Conviene asimismo estudiar dos casos interesantes y sencillos:

■ Un sólo dato

1. En este caso $Z_0^* = \lambda_1 Z_1$. Debido a la condición de sesgo nulo $\lambda_1 = 1$, y el sistema de krigado ordinario se escribe:

$$C_{00} + \mu = C_{10} \Rightarrow \mu = C_{10} - C(0). \quad (73)$$

Además

$$\sigma_{ok}^2 = 2(C(0) - C_{10}). \quad (74)$$

■ Dos datos

En este caso $Z_0^* = \lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2$. El sistema de krigado ordinario se escribe en este caso:

$$\begin{cases} \lambda C(0) + (1 - \lambda) C_{12} + \mu &= C_{10}, \\ \lambda C_{12} + (1 - \lambda) C(0) + \mu &= C_{20}. \end{cases} \quad (75)$$

con lo que el valor de λ viene dado por la expresión:

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{C_{10} - C_{20}}{C(0) - C_{12}}, \quad (76)$$

y teniendo en cuenta que $\rho(h) = \frac{C(h)}{C(0)}$, se llega a la relación:

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{1 - \rho_{12}},$$

con lo cual el peso relativo a Z_1 aumenta si y sólo si aumenta la correlación entre Z_1 y Z_0 , disminuyendo la correlación de éste último con Z_2 . Además la varianza de estimación viene dada por la expresión:

$$\sigma_{ok}^2 = \left(1 - \lambda \rho_{10} - (1 - \lambda) \rho_{20} - \frac{1}{2} (\rho_{10} + \rho_{20} - \rho_{12} - 1) \right) C(0), \quad (77)$$

es decir, σ_{ok}^2 disminuye si los datos se correlan bien con la incógnita y si ρ_{12} disminuye, i.e., la información no es redundante.

- Si los datos estuviesen incorrelados entre sí $\rho_{12} = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\rho_{10} - \rho_{20}), \\ \sigma_{ok}^2 &= \left(1 - \lambda\rho_{10} - (1 - \lambda)\rho_{20} - \frac{1}{2}(\rho_{10} + \rho_{20} - 1)\right) C(0),\end{aligned}$$

con lo que el peso asignado al dato Z_1 aumenta según aumenta $\rho_{10} - \rho_{20}$.

- Si además los datos estuviesen incorrelados con la incógnita entonces:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}, \\ \sigma_{ok}^2 &= \frac{3}{2}C(0),\end{aligned}$$

y el mejor estimador sería la media muestral.

6.6. La trascendencia del desconocimiento de la media: su estimación

Hemos visto que el krigeado simple se utiliza cuando se supone la media conocida. En esta sección vamos a analizar el problema que supone el desconocimiento de la media de una F.A., así como la importancia de su correcta estimación. Para ello utilizaremos una variante del krigeado ordinario conocido como krigeado de la media.

Dada una variable regionalizada $Z(x)$, $x \in D$, un estimador de la media que se suele utilizar es la media muestral:

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N Z(x_{\alpha}). \quad (78)$$

Se trata de un estimador insesgado de la media de la F.A. Un modelizador poco avezado podría pensar que aunque la media se desconozca, siempre se puede optar por un valor estimado (78) y adoptar como técnica de estimación la del krigeado simple. Analizando el problema de estimación de la media, veremos que esto presupone aceptar que todos los datos tienen igual peso, es decir dicho estimador sería adecuado en el caso de completa independencia espacial del fenómeno regionalizado (fenómenos caracterizados por un efecto pepita puro). Para demostrar dicha afirmación, vamos a considerar un enfoque geoestadístico de la media (en el caso estacionario).

Planteamiento

Se desea encontrar un estimador BLUE de la media de la V.R, es decir:

$$m^* = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}), \quad (79)$$

que verifique dos condiciones:

1. ser insesgado, es decir, $E(m^*) = m = E(Z(x))$, $\forall x \in D$.
2. varianza de estimación mínima: $Var(m - m^*) = \text{mín.}$

La primera condición da lugar a:

$$E(m^*) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} E(Z(x_{\alpha})) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} m = m \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1. \quad (80)$$

La condición de varianza mínima se puede expresar:

$$\begin{aligned}
 Var(m - m^*) &= E[(m - m^*)^2] - E^2(m - m^*) = E[(m - m^*)^2] = \\
 &= m^2 + E(m^*)^2 - 2mE(m^*) = E(m^*)^2 - m^2 = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} E(Z(x_{\alpha})) E(Z(x_{\beta})) - m^2] = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}).
 \end{aligned} \tag{81}$$

Por lo tanto para hallar el conjunto de pesos se debe resolver el siguiente problema de optimización con restricciones:

KM) Hallar $\lambda = (\lambda_{\alpha})_{\alpha=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$:

$$Var(m - m^*) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) = \text{mín}$$

bajo la restricción $\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1$.

El Lagrangiano asociado a este problema se escribe:

$$\mathcal{L}(\lambda_{\alpha}, \mu) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) - 2\mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} - 1 \right). \tag{82}$$

Imponiendo las condiciones necesarias de mínimo restringido

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0, \tag{83}$$

se llega a las ecuaciones normales del kriging de la media:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} C_{\alpha\beta} = \mu, & \alpha = 1, n, \\ \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta} = 1. \end{cases} \tag{84}$$

La varianza de estimación resulta ser:

$$\sigma_{KM}^2 = Var(m - m^*)_{\text{mín}} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \mu = \mu,$$

lo que proporciona una interpretación para el multiplicador de Lagrange.

Vemos ahora que relación existe entre la media muestral y el estimador proporcionado por las ecuaciones de kriging. Para ello consideremos un efecto pepita puro, que describe un fenómeno regionalizado altamente heterogéneo, cuya función de covarianza viene dada por:

$$C(x_{\alpha} - x_{\beta}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } x_{\alpha} = x_{\beta}, \\ 0 & \text{si } x_{\alpha} \neq x_{\beta}. \end{cases} \tag{85}$$

En este caso el sistema de krigado de la media se escribe:

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha \sigma^2 &= \mu, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ \sum_{\beta=1}^N \lambda_\beta &= 1,\end{aligned}\tag{86}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= \frac{1}{n}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ m^* &= \overline{m}\end{aligned}$$

y la varianza de estimación es por tanto:

$$\sigma_{KM}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Resumen y observaciones

- Por lo tanto la diferencia entre la estimación de la media y el cálculo de la media aritmética de los datos, radica en que en el primero de los casos se tiene en cuenta la estructura de correlación espacial de los mismos.
- En el caso en que la media es desconocida es necesario desarrollar otros métodos de estimación diferentes al krigado simple, lo que da lugar a la técnica de krigado ordinario.
- La posibilidad de estimar la media posibilita el considerar funciones localmente estacionarias cuya media puede ser aproximada localmente (estimada) por una función constante, a partir de los datos existentes en un recinto móvil de estacionariedad.

6.7. Krigado con anamorfosis

La manera más sencilla de presentar el krigado con anamorfosis de la V.R., es considerar un caso particular del mismo: el krigado lognormal.

6.7.1. Krigado lognormal

Supongamos que la F.A. $Z(x)$, de la cual se conoce una realización $Z(x_\alpha)$ en la red de muestreo $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$, posee una distribución lognormal ($Z(x) > 0, \forall x \in D$). Entonces

$$Z \rightsquigarrow \log N(\mu, \sigma) \Leftrightarrow Y = \ln Z \rightsquigarrow N(\alpha, \beta).\tag{87}$$

Se demuestra que el estimador de krigado es óptimo en el caso en que la distribución de la F.A. $Z(x)$ es normal, razón por la cual se transforma la F.A. $Y(x_\alpha) = \ln Z(x_\alpha)$ para diseñar un estimador del tipo $Y^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Y(x_\alpha)$. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones normales para $Y^*(x_0)$, se deshace la transformación anterior.

6.7.2. Krigado con anamorfosis

El krigado con anamorfosis es la generalización del krigado lognormal al caso de una función aleatoria con función de distribución $F_z(z_1, \dots, z_n)$. A continuación se analiza como realizar dicha transformación en la práctica.

Sean Z, Y dos F.A. con funciones de distribución conocidas $F_z(z), F_Y(y)$. Sea $Y = \varphi(Z)$ una transformación que identifica las funciones de probabilidad acumuladas de ambas F.A., es decir:

$$F_Y(y_p) = F_Z(z_p) = p \in [0, 1],\tag{88}$$

Entonces $Y = F_Y^{-1}(F_Z(z))$. Si la F.A. Y es $N(0, 1)$, entonces la transformación anterior se escribe:

$$Y = G^{-1}(F_Z(z)), \quad (89)$$

donde G es la función de distribución de la $N(0, 1)$ y recibe el nombre de *transformación de anamorfosis Gaussiana*. El problema radica en la práctica, en que se desconoce la función de distribución $F_Z(z)$ de la V.R., por lo que debe de ser inferida a partir de los datos observados. Para ello se ordenan los valores observados en orden creciente $Z^{(1)} \leq Z^{(2)} \leq \dots \leq Z^{(n)}$, y se adopta la siguiente aproximación para $F_Z(z)$:

$$F_Z(z^{(k)}) = \frac{k}{n}, \quad (90)$$

donde k es el orden del dato $Z^{(k)}$ en la secuencia ordenada.

Con esta expresión se obtiene una primera aproximación de $F_Z(z)$, y se transforman las variables según se indica en la figura 11.

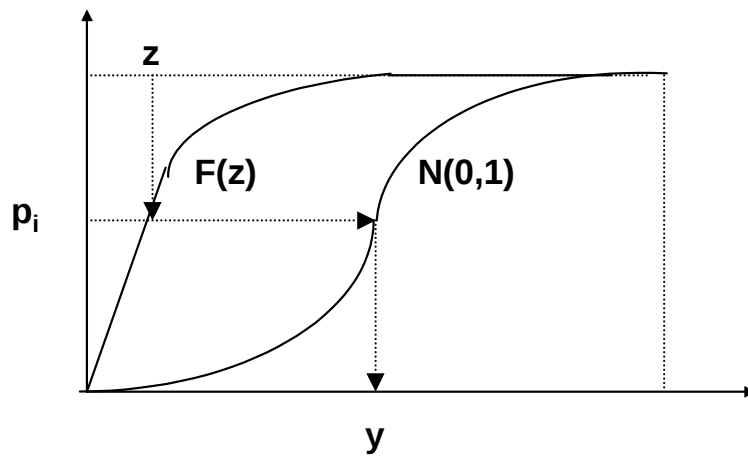


Figura11: Anamorfosis Gaussina.

Como puede observarse $P(Z \leq z_i) = p_i \Rightarrow y_i = G^{-1}(p_i)$. G^{-1} corresponde a una de las aproximaciones numéricas de la función inversa de la función de distribución de la $N(0, 1)$ descritas en la bibliografía.

Dado que se posee un rango discreto de valores, dicha transformación en la práctica implica:

1. interpolación entre valores de z conocidos.
2. extrapolación en las colas ($z < z_{\min}$, $z > z_{\max}$).

La interpolación suele ser lineal que es la más sencilla, mientras que existen diferentes tipos de extrapolación en las colas, motivado por la forma de la distribución normal. Entre éstas destacan los modelos lineales, hiperbólicos y de potencias que son los utilizados por el programa gslib.

6.8. Krigado de variables no intrínsecas

Como vimos el krigado simple es válido para variables estacionarias de media conocida, mientras que el krigado ordinario lo es para el caso de variables estacionarias o intrínsecas cuya media es desconocida. En esta sección proporcionamos algunas ideas de cómo tratar las variables no intrínsecas. Estas se caracterizan por presentar un efecto de deriva, es decir una media que depende de la variable espacial. Ejemplos de variables no estacionarias aparecen en hidrogeología (el nivel pizométrico de

un acuífero en dirección del flujo), en minería (la profundidad del techo o del muro de una capa con buzamiento), en medio ambiente (la concentración de un contaminante en dirección del gradiente de concentración), etc...

En muchos casos la V.R. puede ser descrita como la suma de una función determinista $m(x)$ denominada deriva y de una componente estocástica estacionaria $r(x)$ de media nula, denominada residuo, i.e.,

$$Z(x) = m(x) + r(x). \quad (91)$$

Para este tipo de variables el variograma adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma_Z(h) &= \frac{1}{2} [m(x+h) - m(x)]^2 + \frac{1}{2} E[r(x+h) - r(x)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} [m(x+h) - m(x)]^2 + \gamma_r(h), \end{aligned} \quad (92)$$

lo que da lugar a variogramas no acotados en el infinito si $[m(x+h) - m(x)]^2 \gg h^2$, es decir si la deriva es de grado superior a la lineal.

La resolución de este tipo de problemas posee diversas variantes:

1. suponer que la variable es localmente estacionaria (hipótesis cuasiestacionaria), lo que da lugar al krigeado en un entorno. En este caso es necesario definir el entorno de cuasiestacionariedad¹¹ y estimar el variograma experimental bien como el correspondiente a una dirección estacionaria (en los casos comentados anteriormente la dirección ortogonal a la dirección de no estacionariedad suele ser estacionaria), o inferirlo en ciertas zonas donde el efecto de deriva sea despreciable. Cabe reseñar que el krigeado en un entorno da lugar a soluciones localmente continuas (dentro del entorno de cuasiestacionariedad) pero discontinuas a nivel global. El hecho de adoptar un modelo estacionario para estimar una variable no estacionaria puede parecer una incongruencia, pero hay que pensar que en el krigeado la ley de comportamiento está en los datos (no sólo en el modelo espacial) y en este caso es de suma importancia la elección del recinto de krigeado.
2. suponer la forma de la deriva $m(x)$ conocida, sustraerla y trabajar entonces con la V.R. residual $\varepsilon(x)$. Esta técnica da lugar al krigeado residual, que hemos visto al estudiar las variables no estacionarias. El krigeado residual para distancias superiores al alcance de la variable residual otorga un valor a la F.A. que es igual a su tendencia.

La figura 12 muestra el caso de una variable muro de una capa de carbón con buzamiento del yacimiento de Endesa en Andorra. Puede observarse como el variograma de superficie, los variogramas direccionales y los sdiagramas de dispersión indican la presencia de una no estacionariedad. Cabe observar que el variograma en la dirección de 90° (ortogonal al buzamiento) se estabiliza.

¹¹Que como hemos dicho supone un compromiso entre la escala a la cual el fenómeno se puede suponer localmente estacionario y la cantidad de información disponible en éste.

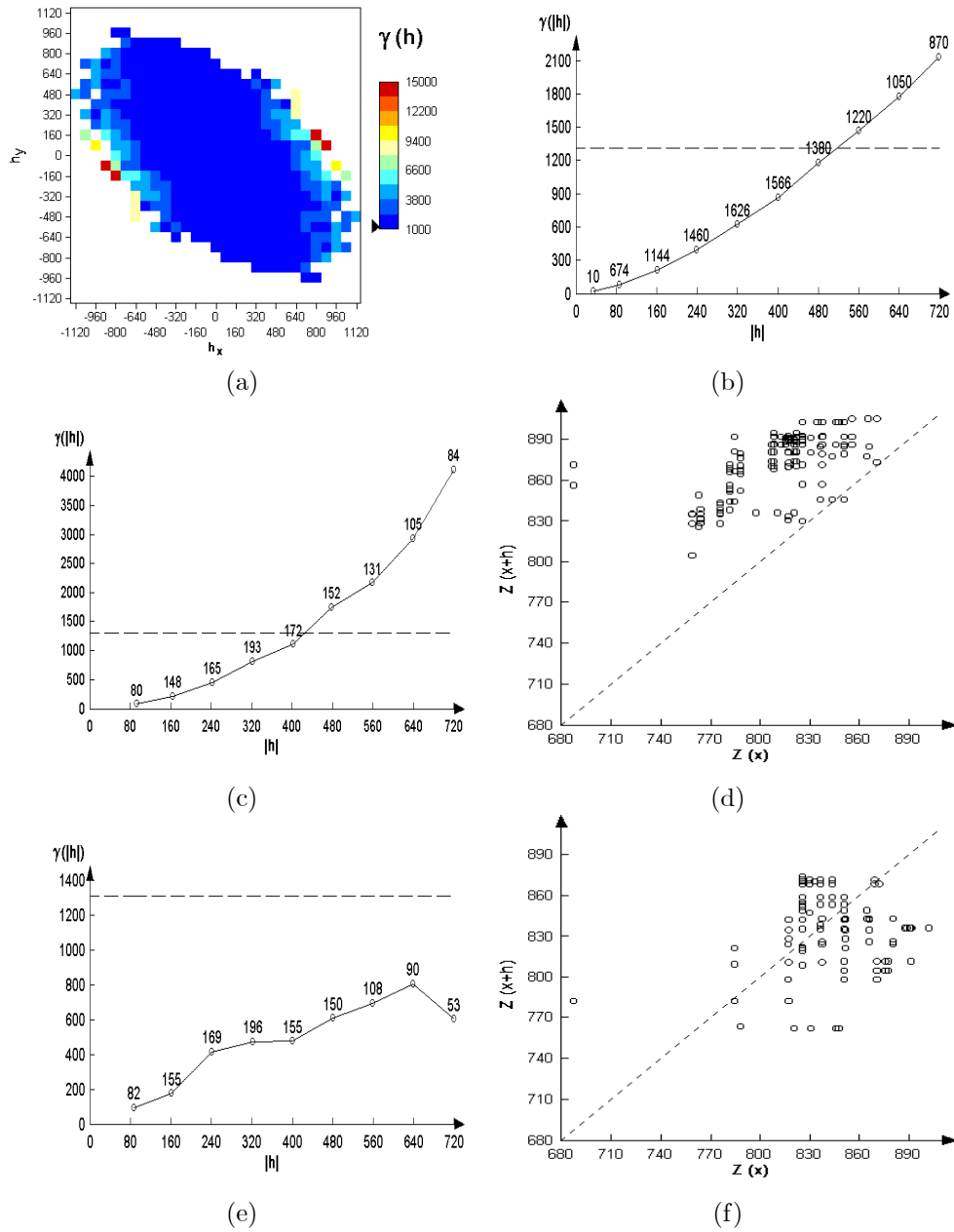


Figura 12: Caso de la variable muro de una capa de carbón con buzamiento. (a) variograma de superficie (b) variograma omnidireccional (c) variograma según dirección de buzamiento (d) diagrama de dispersión para el paso 7 según buzamiento (e) variograma según dirección perpendicular al buzamiento (f) diagrama de dispersión para el paso 7 según dirección ortogonal al buzamiento.

6.9. Algunos aspectos prácticos del kriging

Conviene considerar los siguientes aspectos del kriging:

- Todo estimador de kriging al minimizar el error de la estimación, posee una variabilidad inferior a la realidad, es decir, es una visión más suave que el fenómeno regionalizado en sí. Esto es especialmente cierto cuando se estima con una vecindad única, es decir, utilizando todos los datos del yacimiento. En el caso de vecindad móvil, es decir, kriging en un entorno o en una bola, el suavizado se minimiza, y mucho más en el caso de variables no estacionarias, con medias locales variables, en cuyo caso produce estimaciones discontinuas. En el caso del kriging residual para distancias superiores al alcance de la variable residual, el método otorga un valor a la F.A. que es igual a su tendencia.
- Cuando se estima en un entorno, una práctica habitual es adoptar como bola de estimación la elipse o circunferencias de alcances deducida en la fase de kriging residual. No obstante se recomienda que la bola de estimación sea más amplia (10 o 20 %) dado que aunque a un dato fuera de la bola se le otorgue covarianza nula (no existe similitud estructural), el dato aún proporciona información sobre la media local. Dicho de otro modo es importante trabajar con información muy correlada y con información no correlada para caracterizar mejor el fenómeno regionalizado.
- La distribución angular de los datos es muy importante por varias razones:
 - en primer lugar existe un fenómeno denominado de apantallamiento. Este fenómeno se produce cuando existen dos datos próximos, uno detrás del otro. Mediante experimentos numéricos se comprueba que el dato más próximo apantalla al más lejano, y dado que los pesos están normalizados (su suma debe de ser la unidad) puede ocurrir que alguno de los pesos asignados a los datos apantallados sea negativo, lo cual conduce eventualmente a estimaciones negativas de la variable regionalizada. El efecto de apantallamiento se hace todavía más acusado según aumenta la regularidad de la variable. Esto es fácil de entender dado que si consideramos un efecto pepita puro el mejor estimador geoestadístico es la media muestral, es decir todos los pesos serán idénticos, halla o no apantallamiento. En el otro extremo, para las variables con variogramas gaussianos, los pesos se diferenciarán mucho y si existe apantallamiento, forzosamente tendrán que ser negativos.
 - en segundo lugar existe el fenómeno denomina de agrupamiento, que consiste en en que cuando dos datos están angularmente próximos se comportan como si fuesen un único dato.
 - Por ambas razones los algoritmos de kriging poseen un algoritmo de búsqueda de datos que tiende a privilegiar la distribución de éstos en diferentes octantes y a evitar el apantallamiento.
- Cuando se utilizan técnicas de kriging en un entorno hay que tener en cuenta que las soluciones halladas son discontinuas, dado que la estimación es local. La continuidad y el suavizado aumenta según se aumenta el radio de la bola de estimación.
- La técnica de kriging residual para distancias superiores al alcance de la variable residual otorga un valor a la F.A. que es igual a su tendencia.
- El kriging lognormal debe de ser utilizado para variables regionalizadas positivas, para las cuales se sospecha una distribución lognormal multivariante. Cabe reseñar que al transformar la variable y tomar sus logaritmos, se disminuye el rango de variación de la misma, con lo que los variogramas logarítmicos así calculados suelen ser muy resistentes a la presencia de valores anómalos.

- Finalmente una técnica muy utilizada en minería es la crovalidación, que consiste en suprimir un dato y estimar en dicha posición utilizando el modelo inferido en el análisis estructural. Esta técnica se utiliza con todos los datos y sirve para confirmar el modelo de covarianzas utilizado en la fase de krigeado. No obstante, las recomendaciones expuestas en la fase de análisis estructural siguen siendo válidas, es decir, es mejor utilizar un modelo de variograma que esté confirmado por la práctica geoestadística y por nuestro conocimiento sobre el fenómeno reagionalizado, pese a que las estadísticas de crovalidación no sean muy favorables. Por supuesto, si ambas circunstancias se dan, la situación es óptima.

Referencias

- [1] Armstrong, M. (1998). “Basic Linear Geostatistics”. Ed. Springer.
- [2] Chica Olmo, M. (1988). “Análisis geostadístico en el estudio de la explotación de los recursos minerales”. Tesis doctoral. Departamento de Geodinámica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.
- [3] J.P. Chiles, P. Delfiner (1998). *Geostatistics : Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley Series in Probability and Statistics. Applied Probability and Statistics.
- [4] C.V. Deutsch y A.G. Journel. GSLIB (1992). *Geostatistical Software Library and User’s Guide*. Oxford University Press.
- [5] Edwards, D., Hamson, M. (1990). “Guide to Mathematical Modelling”. CRC Mathematical Guides. Ed. CRC. Press.
- [6] P. Goovaerts (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation (Applied Geostatistics Series)*. Oxford University Press.
- [7] E.H. Isaaks y R.H. Srivastava (1989). *An introduction to applied geostatistics*. Oxford University Press.
- [8] Isobel Clark, W. Harper (2000). *Practical Geostatistics 2000*. Ecosse North America, LLC, 2000.
- [9] A.G. Journel (1990). *Fundamentals of geostatistics in five lessons*. Technical report, American Geophysical Union. 28th International Geological Congress. Short course in geology: volume 8.
- [10] P. K. Kitanidis (1997). *Introduction to Geostatistics : Applications to hydrogeology*. Cambridge University Press, 1997.
- [11] Pannatier, Y. (1996). “VARIOWIN. Software for Spatial Data Analysis in 2D”. En: *Statistics and Computing*. Ed. Springer.
- [12] Samper Calvete, F.J., Carrera Ramírez, J. (1990). “Geostadística. Aplicaciones a la hidrogeología Subterránea”. Ed. Centro Internacional de Métodos de Cálculos Numéricos en Ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [13] Webster, R., Oliver, M.A. (2001). “Geostatistics for Environmental Scientists”. En: *Statistics in Practice*. Ed. John Wiley & Sons, Ltd.
- [14] H. Wackernagel (1995). *Multivariate Geostatistics*. Masson.