



Problemas de identificación de parámetros y al análisis de incertidumbre.

Aplicación al análisis de la resistencia del hormigón.

Índice

1. Introducción	3
1.1. Análisis del Error	5
2. Modelo de Regresión Lineal	7
3. Modelo de Regresión Potencial	10
4. Modelo de Regresión Exponencial	13
5. Comparación entre modelos	16

1. Introducción

El método ultrasonico está basado en la propagación de ondas en un medio material, y que se utiliza frecuentemente para determinar la uniformidad de un elemento, su espesor, su modulo elastico.

La velocidad de propagación obtenida (V) tiene una relación directa con los parámetros elásticos del material e indirecta con las propiedades de resistencia. Utilizando los datos reales proporcionados, construir los tres modelos de regresión:

- Lineal
- Potencial
- Exponencial

Los datos de partida para la resolución del ejercicio se daban en una tabla de Excel y son los siguientes:

Cuadro 1: Datos

UPV (km/s) (V)	Core Strength (MPa) (Fc)
2950	13
3031	18
3044	16
3093	12
3242	15
3468	18
3546	23
3554	23
3611	26
3763	28
3849	27
3892	34
3899	30
3911	30
3922	31
3998	36
4011	32
4276	36
4484	46
4489	39
4494	43
4409	46

Dados estos datos, lo que se pretende es generar tres tipos de modelos de regresión para que a partir de una medida de la V , velocidad de las ondas ultrasonicas, se pueda hallar F_c , core strength.

El problema es un Problema Puramente Sobredeterminado (PPS), es decir, hay un mayor número de ecuaciones que incógnitas así que se resolverá mediante la técnica de Mínimos Cuadrados. Dado un sistema de ecuaciones tal que:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \begin{cases} \vec{b} = \vec{y} \\ A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ \text{rango}(A) = n \end{cases} \quad (1)$$

En general, este tipo de problemas tienen solución si $\vec{b} \in \text{Col}(A)$, y la solución es única. Sin embargo, si $\vec{b} \notin \text{Col}(A)$, el problema no tiene solución:

$$\nexists \vec{x} : A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A \cdot \vec{x} \neq \vec{b} \quad (2)$$

Para obtener la solución sería necesario, en el caso de que $\vec{b} \notin \text{Col}(A)$, para obtener una solución aproximada es necesario hacer una proyección ortogonal de $\vec{b}$ en $\text{Col}(A)$

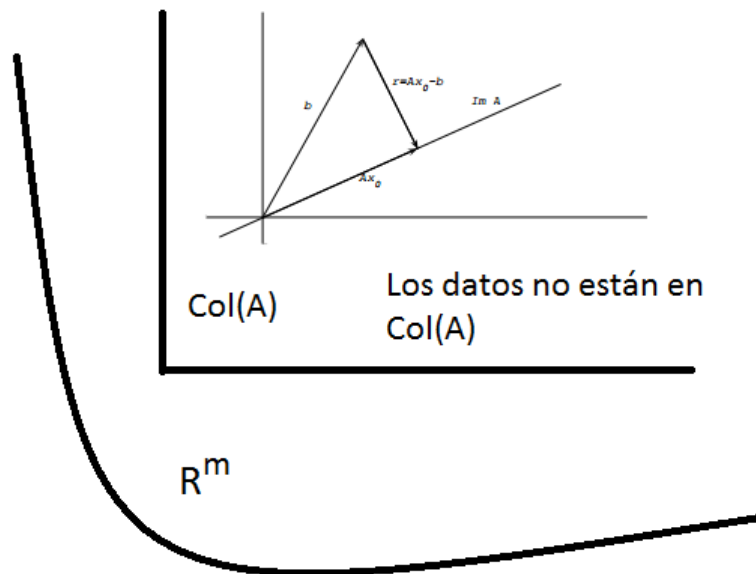


Figura 1: Proyección ortogonal

Puesto que las proyecciones ortogonales que se pueden hacer son infinitas, la proyección que interesa para la resolución de este problema es la de mínima energía (x_{MN}), siendo la energía del vector la Norma 2

$$\|\vec{x}\|_2 = \text{Mín} \Rightarrow \vec{x} \perp \text{Col}(A) \Rightarrow A^T \cdot \vec{x} = 0 \quad (3)$$

Conocido esto el sistema que habría que resolver para hallar la solución de Mínimos Cuadrados sería:

$$A^T (\vec{b} - A \cdot \vec{x}_{LS}) = \vec{0} \Rightarrow A^T \cdot A \cdot \vec{x}_{LS} = A^T \cdot \vec{b} \quad (4)$$

1.1. Análisis del Error

El análisis del error es necesario para los modelos de regresión lineal, potencial y exponencial, puesto que nos servirá como indicador para conocer la bueno que es el ajuste que se lleva a cabo. El error que se va a medir es la diferencia entre la F_c dato y la F_c que se predice: $E = |F_c - F_{c_{pre}}|$, puesto que este es el error absoluto será necesario utilizar otros métodos para hallar los distintos errores. Por otro lado, el error se puede medir de muchas forma, en este caso los errores que se van a medir son los siguientes:

- Error : $mean(F_c - F_{c_{pre}})$
- Norma2 : $\|Error\|_2 = \|F_c - F_{c_{pre}}\|_2$
- Norma1: $\|Error\|_1 = \|F_c - F_{c_{pre}}\|_1$
- Normainf : $\|Error\|_{\inf} = \|F_c - F_{c_{pre}}\|_{\inf}$
- RMS : $\frac{1}{\sqrt{n \cdot \|F_c - F_{c_{pre}}\|_2}}$
- Erel: $\frac{\|F_c - F_{c_{pre}}\|_2}{\|F_c\|_2} \cdot 100$
- Erelinf : $\frac{\|F_c - F_{c_{pre}}\|_{\inf}}{\|F_c\|_{\inf}} \cdot 100$

Para el análisis del error es necesario estudiar diferentes tipos de errores. Lo primero es definir y conocer que es cada uno de los errores. Los errores que se van a medir son los siguientes:

- Error absoluto
- Norma dos del error
- Norma uno del error
- Norma infinito del error
- RMS
- Error relativo
- Error relativo infinito

El error absoluto Δ es igual a:

$$\Delta_y = |y - y_{pre}| \quad (5)$$

La norma dos del error es:

$$\|e\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

La Norma uno del error

$$\|e\|_1 = \sum_i^n |e_i| \quad (7)$$

La norma infinito del error:

$$\|e\|_\infty = \underbrace{\max}_{i \leq j \leq n} |x_j| \quad (8)$$

El RMS:

$$RMS = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \|e\|_2}} \quad (9)$$

El error relativo:

$$\delta = \frac{\|e\|_2}{\|y\|_2} \cdot 100 \quad (10)$$

El error relativo infinito

$$\delta_{\infty} = \frac{\|e\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}} \cdot 100 \quad (11)$$

El error relativo es un buen indicador de la calidad del modelo, en la siguiente tabla se muestra en función del valor del error relativo lo bueno que es un modelo:

Cuadro 2: Error-Calidad de un modelo

Error relativo	Calidad del modelo
>25 %	Mala
25-20 %	Regular
20-15 %	Aceptable
15-10 %	Bueno
10-5 %	Muy bueno
5-3 %	Excelente
<3 %	Excelente pero normalmente muy complejo

2. Modelo de Regresión Lineal

El modelo de regresión lineal se basa en la utilización de dos pesos a_0 y a_1 para ajustar el modelo mediante la siguiente recta:

$$f_c = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot V \quad (12)$$

Para crear el modelo de regresión lineal es importante tener claro la forma del problema, para poder crear la matriz del sistema, A , y a partir de ello hallar la solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 1 & V_1 \\ 1 & V_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & V_m \end{pmatrix} \quad (13)$$

Una vez que se construye A habría que resolver el sistema:

$$A^T \cdot A \cdot \overrightarrow{x_{LS}} = A^T \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{x_{LS}} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Fc \quad (14)$$

Para la creación del modelo de regresión lineal es necesario introducir los datos del problema en Matlab:

```
%Datos
V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892, 3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32, 36, 46, 39, 43, 46];
```

Figura 2: Datos

A continuación, se lleva a cabo una gráfica con los valores de V y de Fc para ver como es la nube de puntos:

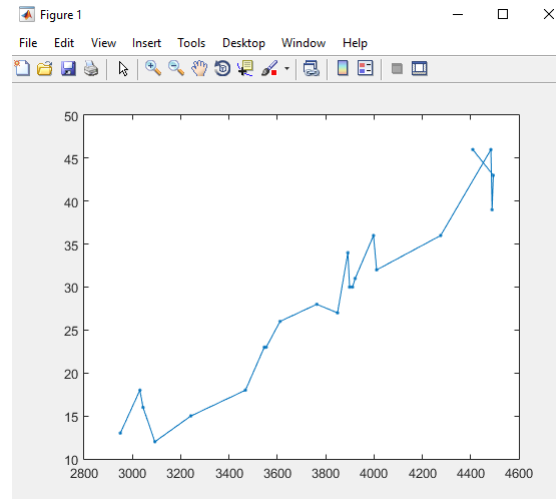


Figura 3: Gráfica de los datos

Después, se contruye la matriz del sistema A , y se obtiene $\overrightarrow{x_{LS}}$ cuyas componentes son los pesos a_0 y a_1 :

```
%Regresión lineal
A=[ones(length(V),1), V(:)];
B=A'*A;
xls=inv(B)*A'*Fc(:)
```

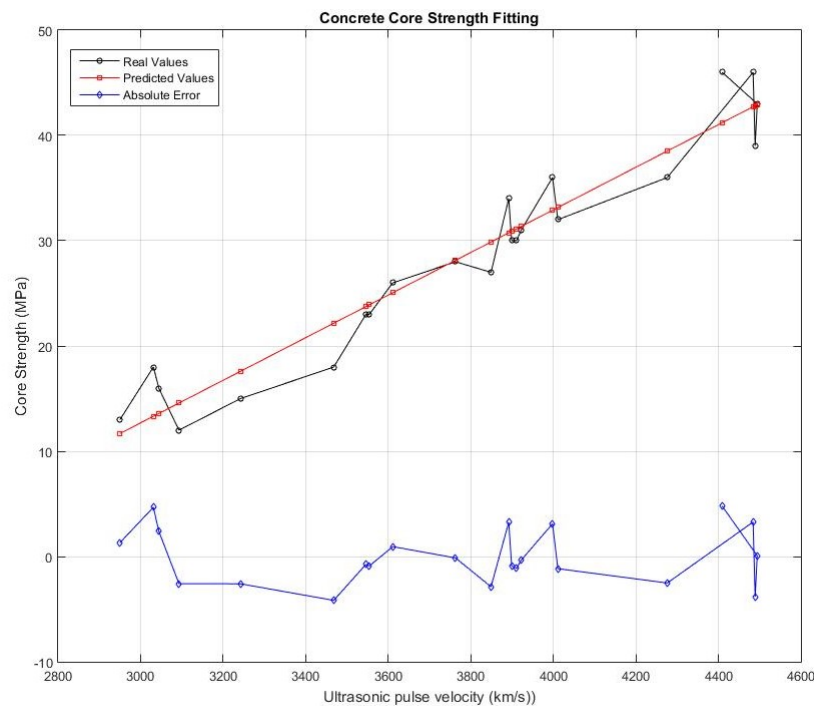
Los resultados que se obtienen de $\overrightarrow{x_{LS}}$ son:

```
>> xls
xls =
-48.0114
0.0202
```

A partir de los valores de $\overrightarrow{x_{LS}}$ se puede obtener la $F_{c_{pre}}$ que sería los valores de Fc que predigo mediante el modelo de regresión lineal:

```
Fcpre=A*xls;
```

Por último, se representa el modelo en la misma gráfica que los datos para ver como se ajusta:



El script que se crea en Matlab para crear el modelo de regresión lineal es el siguiente:

```

1  %ESTIMACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN
2  %MEDIANTE TÉCNICAS DE MINIMOS CUADRADOS
3  %Datos
4  V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892,
5  3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
6  Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32,
7  36, 46, 39, 43,46];
8  plot(V,Fc,'*-')
9  %Regresión lineal
10 A=[ones(length(V),1), V(:)];
11 B=A'*A;
12 xls=inv(B)*A'*Fc(:);
13 %Fc que se predice
14 Fcpred=A*xls;
15 %Gráfica del modelo de regresión lineal
16 hold on
17 plot(V,Fcpred,'*-')

```

Figura 4: Script de regresión lineal

Además de crear el modelo es necesario calcular el error que se comete al emplear este modelo como aproximación, se calcula en matlab utilizando el siguiente script y los errores se muestran en la tabla:

```

20 %Error del modelo de regresión lineal
21 error=Fc(:)-Fcpred(:);
22 mean(error)
23 %Error norma 2
24 norma2=norm(error)
25 %Error con la norma 1
26 normal=norm(error,1);
27 %Error norma infinita
28 normainf=norm(error,inf);
29 %El RMS
30 RMS=1/sqrt(length(V))*norm(error);
31 %Error relativo
32 Erel=norm(error)/norm(V)*100;
33 %Error relativo norma infinito
34 Erelinf=norm(error,inf)/norm(V,inf)*100;

```

Figura 5: Script de regresión lineal

Cuadro 3: Error del modelo de regresión lineal

Errores-Lineal	
Error	8,40E-15
Norma2	12,2127
Norma1	47,7127
NormaInf	4,7931
RMS	2,6038
Erel	8,6739
Erelinf	10,4198

Puesto que el error relativo es del 8,6739 % la calidad del modelo es muy buena.

3. Modelo de Regresión Potencial

El modelo de regresión potencial se basa en la siguiente ecuación para llevar a cabo el ajuste:

$$f_c = a_0 \cdot V^{a_1} \Rightarrow \lg f_c = \lg a_0 + a_1 \cdot \log V \quad (15)$$

Para crear el modelo de regresión lineal es importante tener claro la forma del problema, para poder crear la matriz del sistema, A , y a partir de ello hallar la solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} \lg(V_1) & 1 \\ \lg(V_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \lg(V_m) & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Una vez que se construye A habría que resolver el sistema:

$$A^T \cdot A \cdot \overrightarrow{x_{LS}} = A^T \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{x_{LS}} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Fc \quad (17)$$

Para la creación del modelo de regresión se introducen los datos del problema

```
%Datos
V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892, 3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32, 36, 46, 39, 43,46];
```

Figura 6: Datos

A continuación, se lleva a cabo una gráfica con los valores de V y de Fc para ver como es la nube de puntos:

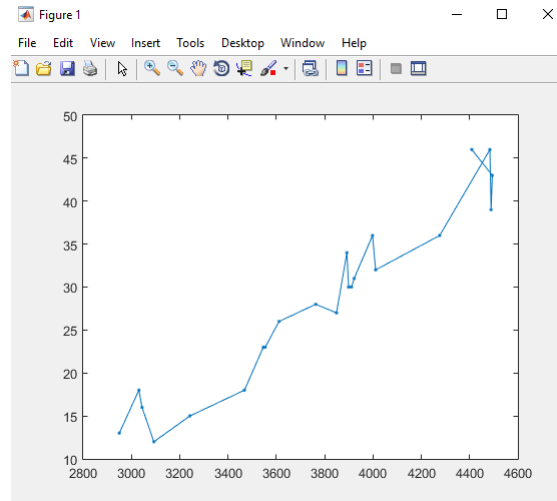


Figura 7: Gráfica de los datos

Después, se contruye la matriz del sistema A , y se obtiene $\overrightarrow{x_{LS}}$ cuyas componentes son $\lg(C)$ y α :

```
%Regresión potencial
A=[log(V(:)), ones(length(V),1)];
B=A'*A;
xls=inv(B)*A'*log(Fc(:))
```

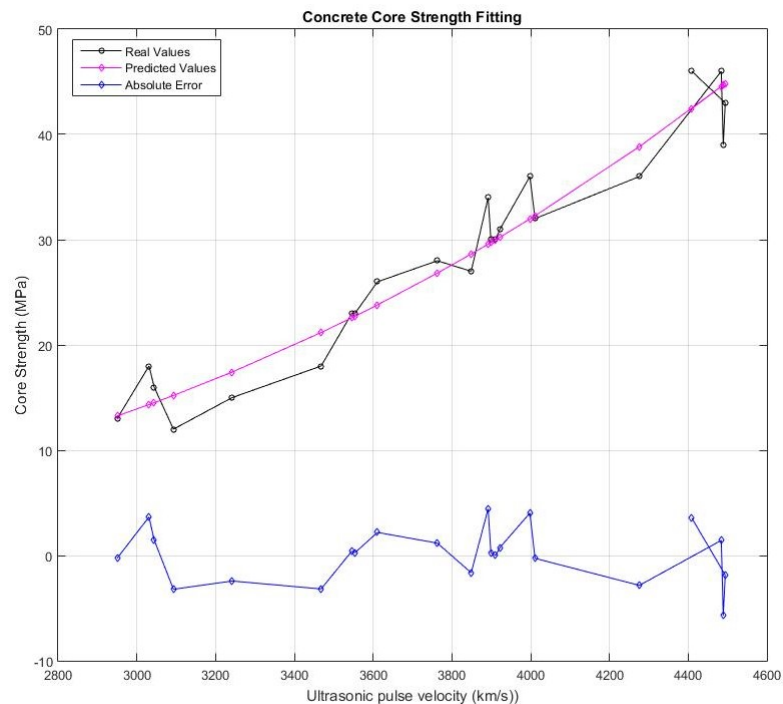
Los resultados que se obtienen de $\overrightarrow{x_{LS}}$ son:

```
>> xls
xls =
    2.8955
   -20.5496
```

A partir de los valores de $\overrightarrow{x_{LS}}$, se obtienen C y α y después ya se puede obtener la Fc_{pre} que sería los valores de Fc que predigo mediante el modelo de regresión lineal:

```
C=exp(xls(2));
Alpha=xls(1);
Fcpred=C*V.^(Alpha)
```

Por último, se representa el modelo en la misma gráfica que los datos para ver como se ajusta:



El script que se crea en Matlab para crear el modelo de regresión potencial es el siguiente:

```
1 %ESTIMACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN
2 %MEDIANTE TÉCNICAS DE MINIMOS CUADRADOS
3 %Datos
4 V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892,
5 3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
6 Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32,
7 36, 46, 39, 43, 46];
8 plot(V,Fc,'*-')
9 %Regresión potencial
10 A=[log(V(:)), ones(length(V),1)];
11 B=A'*A;
12 xls=inv(B)*A'*log(Fc(:))
13 %Constantes C y Alpha
14 C=exp(xls(2));
15 Alpha=xls(1);
16 %Fc que se predice
17 Fcpred=C*V.^(Alpha)
18 hold on
19 plot(V,Fcpred,'*-')
```

Además de crear el modelo es necesario calcular el error que se comete al emplear este modelo como aproximación, se calcula en matlab utilizando el siguiente script y los errores se muestran en la tabla:

```

22 %Error del modelo de regresión potencial
23 error=Fc(:)-Fcpred(:);
24 mean(error)
25 %Error norma 2
26 norma2=norm(error)
27 %Error con la norma 1
28 normal=norm(error,1);
29 %Error norma infinita
30 normainf=norm(error,inf);
31 %El RMS
32 RMS=1/sqrt(length(V))*norm(error);
33 %Error relativo
34 Erel=norm(error)/norm(V)*100;
35 %Error relativo norma infinito
36 Erelinf=norm(error,inf)/norm(V,inf)*100;

```

Cuadro 4: Errores modelo de regresión potencial

Errores-Potencial	
Error	0,1058
Norma2	12,0992
Norma1	45,0529
NormaInf	5,7065
RMS	2,5796
Erel	8,5933
Erelinf	12,4055

Puesto que el error relativo es del 8,5933 % la calidad del modelo es muy buena

4. Modelo de Regresión Exponencial

El modelo de regresión exponencial se basa en la siguiente ecuación para llevar a cabo el ajuste:

$$f_c = a_0 \cdot \exp^{a_1 \cdot V} \Rightarrow \lg f_c = \lg a_0 + a_1 \cdot V \quad (18)$$

Para crear el modelo de regresión lineal es importante tener claro la forma del problema, para poder crear la matriz del sistema, A , y a partir de ello hallar la solución de mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} V_1 & 1 \\ V_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ V_m & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Una vez que se construye A habría que resolver el sistema:

$$A^T \cdot A \cdot \overrightarrow{x_{LS}} = A^T \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{x_{LS}} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Fc \quad (20)$$

A continuación, se lleva a cabo una gráfica con los valores de V y de F_c para ver como es la nube de puntos:

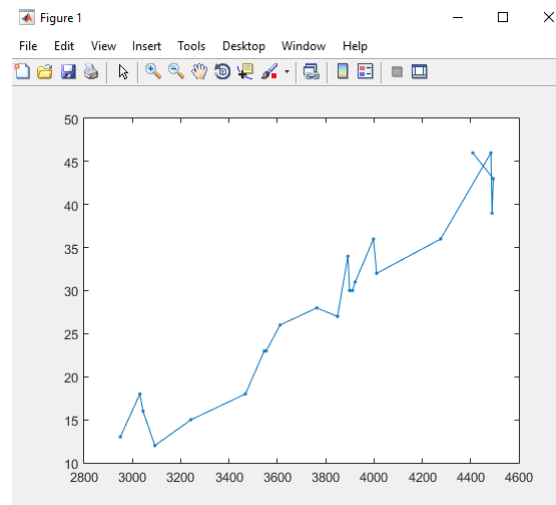


Figura 8: Gráfica de los datos

```
%Datos
V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892, 3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32, 36, 46, 39, 43,46];
```

Figura 9: Datos

Después, se contruye la matriz del sistema A , y se obtiene $\overrightarrow{x_{LS}}$

```
%Regresión Exponencial
A=[V(:), ones(length(V),1)];
B=A'*A;
xls=inv(B)*A'*log(Fc(:));
```

Los resultados que se obtienen de $\overrightarrow{x_{LS}}$ son:

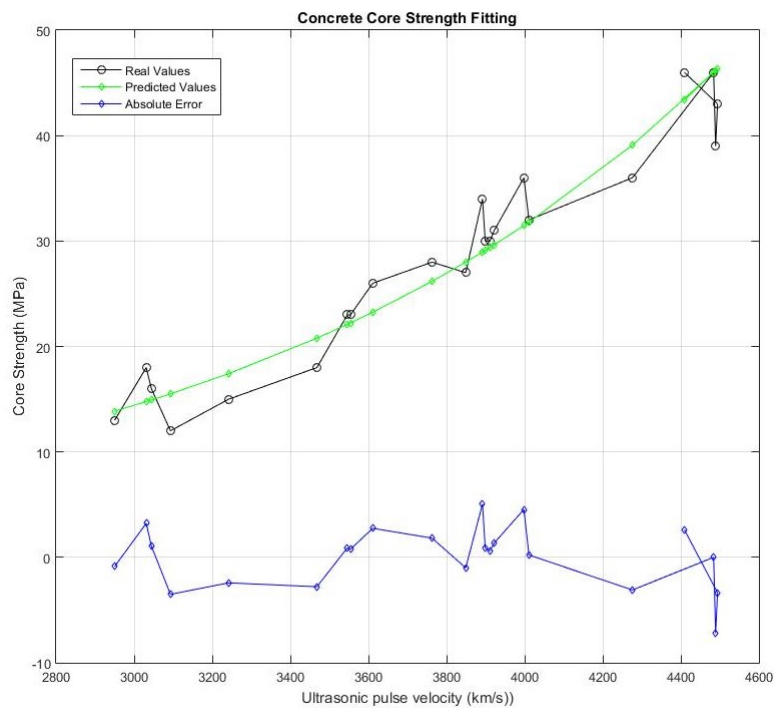
```
>> xls
xls =
    0.0008
    0.3231
```

A partir de los valores de $\overrightarrow{x_{LS}}$, se obtienen C y k y después se puede obtener la $F_{c_{pre}}$ que sería los valores de F_c que predigo mediante el modelo de regresión lineal:

```
C=exp(xls(2))
k=xls(1)

Fcpre=C*exp(1).^ (k.*V)
```

Por último, se representa el modelo en la misma gráfica que los datos para ver como se ajusta:



El script que se crea en Matlab para crear el modelo de regresión exponencial es el siguiente:

```
1 %ESTIMACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN
2 %MEDIANTE TÉCNICAS DE MINIMOS CUADRADOS
3 %Datos
4 V=[2950, 3031, 3044, 3093, 3242, 3468, 3546, 3554, 3611, 3763, 3849, 3892,
5 3899, 3911, 3922, 3998, 4011, 4276, 4484, 4489, 4494, 4409];
6 Fc=[13, 18, 16, 12, 15, 18, 23, 23, 26, 28, 27, 34, 30, 30, 31, 36, 32,
7 36, 46, 39, 43, 46];
8 plot(V,Fc,'-o')
9 %Regresión Exponencial
10 A=[V(:), ones(length(V),1)];
11 B=A'*A;
12 xls=inv(B)*A'*log(Fc(:));
13 %Valores de las constantes C y k
14 C=exp(xls(2))
15 k=xls(1)
16 %Fc que se predice
17 Fcpred=C*exp(1).^(k.*V)
18 %Comparación gráficas entre los datos y el ajuste
19 hold on
20 plot(V,Fcpred,'-o')
```

Además de crear el modelo es necesario calcular el error que se comete al emplear este modelo como aproximación, se calcula en matlab utilizando el siguiente script y los errores se muestran en la tabla:

```
23 %Error del modelo de regresión exponencial
24 error=Fc(:)-Fcpred(:);
25 mean(error)
26 %Error norma 2
27 norma2=norm(error)
28 %Error con la norma 1
29 norma1=norm(error,1);
30 %Error norma infinita
31 normainf=norm(error,inf);
32 %El RMS
33 RMS=1/sqrt(length(V))*norm(error);
34 %Error relativo
35 Erel=norm(error)/norm(V)*100;
36 %Error relativo norma infinito
37 Erelinf=norm(error,inf)/norm(V,inf)*100;
```

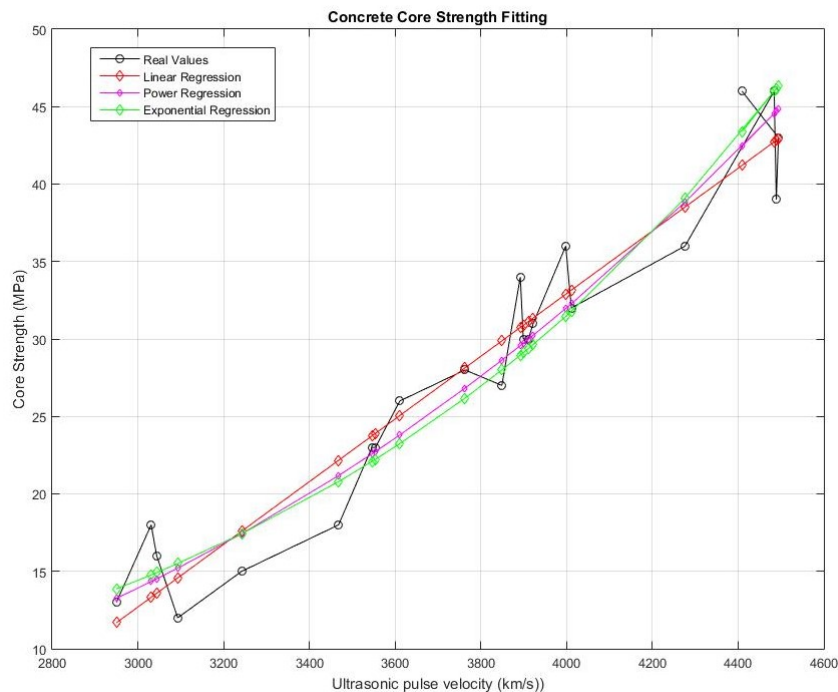
Cuadro 5: Errores modelo regresión exponencial

Errores-Exponencial	
Error	0,0741
Norma2	13,4136
Norma1	50,0458
NormaInf	7,1779
RMS	2,8598
Erel	9,5268
Erelinf	15,6042

Puesto que el error relativo es del 9,5268 % la calidad del modelo es muy buena.

5. Comparación entre modelos

Anteriormente se han visto los tres modelos de regresión utilizados en el problema (lineal, potencial y exponencial) en la siguiente gráfica se muestra la gráfica de datos así como los tres modelos de regresión:



En la gráfica anterior se puede ver que todos los modelos se ajustan bastante bien a los datos y que la calidad del ajuste es muy buena. Sin embargo, para conocer exactamente cual es el modelo que mejor se ajusta, el que tiene un menor error, se

muestra la siguiente tabla con todos los datos de los errores calculados para cada uno de los modelos:

Cuadro 6: Comparación de errores

Errores	Lineal	Potencial	Exponencial
Error	8,40E-15	0,1058	0,0741
Norma2	12,2127	12,0992	13,4136
Norma1	47,7127	45,0529	50,0458
NormaInf	4,7931	5,7065	7,1779
RMS	2,6038	2,5796	2,8598
Erel	8,6739	8,5933	9,5268
Erelinf	10,4198	12,4055	15,6042

En la tabla anterior se observa que la calidad de los tres modelos es muy buena puesto que el error relativo de los 3 está por debajo del 10 %. Además, en función del error relativo los modelos se pueden ordenar de menor a mayor error relativo de la siguiente forma:

1. Modelo de regresión lineal
2. Modelo de regresión potencial
3. Modelo de regresión exponencial

Se puede concluir que para estimar la resistencia de un hormigón, F_c , a partir de la velocidad de las ondas ultrasónicas, V , el mejor modelo es el de regresión lineal.